BAHAN AJAR MATEMATIKA

(Untuk Calon Guru pada Jenjang Pendidikan SD/MI)

Penulis:
Syaripah, M. Pd

Editor:
Rahadian Kurniawan

LP2 IAIN CURUP

BAHAN AJAR MATEMATIKA
(Untuk Calon Guru pada Jenjang Pendidikan SD/MI)

Penulis : Syaripah, M. Pd

Editor : Rahadian Kurniawan

Layout : Sulthon El Aziz

Penerbit : LP2 IAIN Curup
Alamat : Jl. Dr. Ak Gani No. 1, Dusun Curup,
Rejang Lebong – Bengkulu – Indonesia
Website : http://book.iaincurup.ac.id
Email : publikasi@iaincurup.ac.id

ISBN : ____________________________
Cetakan Pertama, Oktober 2023

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan suatu bidang ilmu yang sangat dibutuhkan. Ia berkembang sejalannya teklonogi. Tak satupun negara menolak kehadirannya dan tak ada agama yang melarang untuk mempelajarinya. Eksistensinya di dunia sangat dibutuhkan untuk keberlangsungan kehidupan yang terus berjalan sesuai dengan tuntutan zamannya, karna tanpa matematika yang luput dari kehidupan umat manusia di muka bumi ini. Matematika juga disebut ratu sekaligus pelayan bagi ilmu yang launnya.

Akan tetapi kehadiran matematika pada dunia pendidikan di Indonesia pada umumnya, masih menjadi momok yang menakutkan bagi sebagian siswa bahkan mahasiswa sekalipun untuk mempelajarinya. Padahal tujuan matematika hadir dalam pendidikan khususnya untuk menata pola pokir, nalar siswa maupun mahasiswa agar mampu memiliki kamampuan yang dapat mengembangkan diri dalam berbagai disiplin ilmu lainnya.

Mahasiswa yang mengikuti pendidikan tinggi di Prodi Pendidikan Guru Sekolah Dasar (PGSD) maupun Prodi Pendidikan Guru Madrasah Ibtidaiyah (PGMI) tentunya memengang peranan penting dalam dunia pendidikan khususnya menjadi guru kelas pada mata pelajaran Matematika. Seorang mahasiswa calon guru tersebut tentu memiliki kemampuan dalam memahami dan menguasai bidang matematika sekolah dasar. Matematika sekolah merupakan topik-topik matematika yang di sesuaikan dengan perkembangan kemampuan matematis siswa.

Materi matematika sekolah merupakan salah saty objek pengetahuan yang harus dikuasai oleh setiap guru. Mahasiswa yang sedang mengikuti pendidikan tinggi di bidang pendidikan matematika/PGMI/PGSD yang kelak akan menjadi guru matematika juga harus sangat menguasai matematika sekolah dengan baik (Wahyudin, 1999). Matematika sekolah yang merupakan topik-topik mata pelajaran matematika di sekolah seharusnya dikuasai dan dipahami oleh setiap mahasiswa calon guru, supaya Ketika telah bertugas sebagai guru matematika sepenuhnya di sekolah, mereka mampu menjadi fasilitator yang baik dalam proses belajar mengajar matematika. Penguasaan bahan ajar yakni materi matematika sekolah merupakan salah satu keharusan yang wajib dimiliki oleh calon guru matematika (Abdullah, 2015). Ketika mahasiswa calon guru sudah dibekali dengan pengetahuan matematika yang culkup, Langkah selanjutnya adalah bagaimana mahasiswa tersebut mampu mentransformasikan pengetahuan yang dimilikinya kepada peserta didiknya. Pengetahuan tersebut tentunya dapat di transformasi kan secara utuh jika mahasiswa calon guru tersebut sudah sepenuhnya menguasai materi matematika sekolah Ketika sudah diberikan Amanah/ditugaskan sebagai seorang pengajar.

Pada kenyataannya, beberapa penelitian menunjukkan lemahnya penguasaan mahasiswa calon guru matematika di sekolah. Salah satunya penelitian

Maryono (Maryono, 2016) menemukan bahwa penguasaan konsep matematika pada mahasiswa yang memiliki kemampuan akademik cukup berada pada level 0 yakni level dimana mahasiswa tidak mampu menyatakan definisi yang benar, tidak mampu menggunakan notasi yang tepat, hanya menggunakan pertanyaan deklaratif atau procedural, tidak mampu menginterpretasi serta menggunakan representasi yang berbeda dengan mudah, serta mengalami kesulitan untuk melihat koneksi atau hubungan antara topik-topik yang berbeda. Sedangkan pada mahasiswa yang memiliki kemampuan akademik yang baik dan sangat baik berada pada level 1, yakni level dimana mahasiswa mampu mendefinisikan konsep dengan tepat, masih menggunakan pertanyaan deklaratif atau procedural, mampu menginterpretasi dan menggunakan representasi grafik dan selain grafik, serta mampu melihat koneksi antara topik-topik yang berbeda. Tidak ada mahasiswa yang mencapai level 2 sebagai level tertinggi.

Sementara observasi yang dilakukan dilapangan menunjukkan bahwa mahasiswa PGMI memiliki kemampuan penguasaaan konsep yang sangat rendah, hal tersebut dapat dilihat pada pemberian tes mata kuliah Matematika SD/MI. Kebanyakan mahasiswa tidak dapat menjawab soal secara utuh dan sistematis bahkan hanya menuliskan jawabannya saja tanpa adanya proses pemecahan masalah sesuai anjuran pada lembar tes.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana konsep dan penerapan bilangan, FPB dan KPK

2. Bagaimana konsep dan penerapan aljabar
3. Bagaimana konsep dan penerapan geometri
4. Bagaimana konsep dan penerapan statistika
5. Bagaimana konsep dan penerapan peluang
6. Bagaimana konsep dan penerapan logika

C. Urgensi Penulisan Buku

Buku ini sangat penting bagi calon guru/mahasiswa serta dosen. Adapun pentingnya bagi calon guru matematika pendidikan Sekolah Dasar adalah:

1. Sebagai penunjang aktivitas akademik; teknologi informasi yang terus berkembang sampai saat ini membuat mahasiswa menjadi terlena pada situasi yang serba instan dan mudah. Setiap mahasiswa memiliki caranya masing-masing untuk memanfaatkan sumber informasi yang tersedia saat ini. Pada konteks ini sumber informasi buku menjadi daya untuk menjembatani mahasiswa dalam memahami konsep matematika yang akan dijadikan sebagai literatur.
2. Untuk membantu berpikir sistematis; Dengan mempelajari matematika, seseorang dapat berpikir lebih sistematis. Hal ini terjadi karena kebiasaan berhitung dan berlatih deret. Dengan mempelajari hal itu, secara otomatis otak akan berpikir teratur. Dengan begitu akan membuat kita lebih mudah dalam mengatur sesuatu
3. Untuk mengembangkan logika; Dalam pelajaran matematika berbicara tentang berpikir secara logis. Semuanya didasarkan dari perhitungan yang tepat tanpa adanya asumsi. Dengan memiliki logika akan

membantu menajamkan pola pikir agar dapat mengambil keputusan secara matang. Jika seseorang dapat berpikir logis maka tidak akan mudah terbius informasi hoax. Menyelesaikan latihan soal matematika akan secara paralel melatih otak untuk berpikir secara optimal.

4. Untuk memahami konsep matematika; menjelaskan antar konsep dan mengaplikasikannya konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien dan tepat dalam pemecahan masalah.
5. Untuk memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh
6. Untuk berpikir secara deduktif menarik kesimpulan secara deduktif adalah melihat dari pola yang umum. Dengan begitu dapat melatih otak untuk berpikir secara objektif. Berpikir objektif adalah satu dari sekian banyak soft skill dari seluruh bidang kerja. Jika detikers terbiasa mengerjakan soal logika matematika, maka akan terbiasa berpikir secara rasional.
7. Matematika menjadi teliti, cermat dan sabar; Pelajaran matematika sering diidentikkan dengan soal-soal cerita yang rumit dan panjang. Dalam menyelesaikan soal-soal tersebut dibutuhkan kesabaran dan ketelatenan. Jika kita salah dalam mengerjakan soal, bisa jadi kita harus mengerjakan kembali soal-soal tersebut dari awal.

Adapun bagi dosen menjadi penting karena :

1. Untuk bahan ajar ; buku referensi merupakan salah satu yang dapat membantu mahasiswa dalam belajar secara mandiri dengan bahan ajar yang disesuaikan dengan kurikulum.
2. Sebagai fungsi pembelajaran klasikal : bahan ajar memiliki fungsi sebagai informasi, pengawas, pengendali serta sebagai pendukung proses perkuliahan
3. Sebagai fungsi individual : secara individual bahan ajar sebagai media dan alat untuk menyusun dan mengawasi mahasiswa dalam memperoleh informasi
4. Sebagai fungsi kelompok ; secara klasikal bahwa bahan ajar memiliki fungsi bahan yang terintegrasi dalam pelaksanaan pembelajaran kelompok, sebagai pendukung bahan ajar utama dan apabila dirancang sedemikian rupa maka dapat meningkatkan motivasi mahasiswa

D. Metode Pemecahan Masalah

Pendekatan yang digunakan dalam penulisan buku referensi ini adalah penelitian kualitatif. Yang dimaksud dengan pendekatan kualitatif pada prinsipnya adalah untuk mendeskripsikan dan menggambarkan secara kritis suatu fenomena yang berhubungan dengan subyek penelitian (Yusuf, 2014). Pendekatan kualitatif lebih mengarah kepada makna, penalaran, dan definisi suatu konteks tertentu, karena lebih banyak meneliti perihal yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Dalam pendekatan kualitatif, proses lebih dipentingkan daripada hasil. Tujuan dari pendekatan ini lebil kepada hal-hal yang sifatnya praktis (Sarwono, 2018).

Jenis penelitian yang akan digunakan adalah *library research* atau bisa juga disebut penelitian kepustakaan, yang merupakan serangkaian kegiatan yang dilakukan dengan mencari, mengumpulkan, membaca, menelaah, mengkaji, mencatat dan mengolah bahan penelitian berupa data pustaka (Zed, 2004). Kegiatan dalam *library research* sebatas hanya pada data dari literatur/perpustakaan saja tanpa harus terjun ke lapangan. Alasan peneliti menggunakan metode *library research* agar memperoleh data teoritis, dengan cara menganalisa literatur baik berupa buku, dokumen, materi, atau hasil penelitian terdahulu yang dapat digunakan sebagai sumber rujukan.

Subyek dalam penelititan ini adalah jurnal penelitian, literatur-literatur atau buku-buku, yang berhubungan dengan pokok membahasan maupun sumber lain tentang materi Matematika SD/MI. Analisis data berbentuk pemaparan/deskripsi yang berkaitan dengan masalah yang diteliti dan disajikan dalam bentuk narasi. Pemaparan data tersebut merupakan jawaban dari masalah yang ingin dijawab yang sudah ditetapkan pada rumusan masalah penelitian.

E. Kekhasan dari Buku

Kekhasan buku ini adalah dapat dijadikan sebagai pedoman bagi mahasiswa calon guru SD/MI, untuk mendalami materi, menemukan konsep bahkan dapat menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari peserta didik. Karena di masa sekarang diperlukan guru yang dapat mentransformasikan pengetahuannya secara utuh terhadap peserta didik. Karna matematika memiliki unsur berkesinambungan antar materi

DESKRIPSI

Adapun kandungan per Bab pada rancangan buku ini adalah sebagai berikut :

BAB I. KONSEP BILANGAN, FPB dan KPK

Pada Bab ini akan membahas mengenai konsep bilangan, FPB dan KPK. Konsep Bilangan ini selalu dikaitkan dengan pekerjaan menghubung-hubungkan baik benda benda maupun dengan lambang bilangan, Kelipatan persekutuan terkecil (KPK) adalah nilai terkecil yang sama dihasilkan oleh dua atau lebih kelipatan bilangan. Sedangkan Faktor Persekutuan terbesar (FPB) merupakan nilai terbesar yang dihasilkan oleh 2 atau lebih faktor bilangan

BAB II. ALJABAR

Pada Bab ini akan membahas tentang aljabar yang merupakan salah satu materi dasar yang penting untuk dipelajari dalam pembelajaran matematika. Aljabar meliputi simbol-simbol matematika dan aturan untuk memanipulasi simbol-simbol ini; aljabar merupaka benang pemersatu dari hampir semua bidang matematika yang meliputi bilagan, geometri dan analisis.

BAB III. GEOMETRI

Pada Bab ini akan membahas tentang ilmu praktis dan berhubungan dengan formula yang berbeda dari luas,panjang dan volumi. Luas lingkaran, keliling, dan volume silinder adalah beberapa konsep dasar topik Geometri. Dengan proses belajar ini, siswa dapat memahami sudut akut, segitiga, persegi panjang, sudut tumpul, angka bujursangkar dan banyak hal lain yang relevan secara mendalam. Geometri ditemukan di mana-mana, dalam seni, arsitektur, teknik, olahraga, survei tanah, astronomi, ruang, alam, patung, mesin, robot, mobil dll, dan karena itu menjadi penting untuk memahami pendekatan dasar perlunya geometri dalam kehidupan nyata.

BAB IV. STATISTIKA

Pada Bab ini akan membahas ilmu tentang cara mengumpulkan, mengolah, menyajikan menganalisis sampai pada membuat penafsiran atau kesimpulan dari data yang diperoleh. statistik sangat berperan dalam kehidupan sehari-hari misalnya dalam kehidupan sehari-hari kita sering menggunakan ilmu statistika untuk mengatur berapa jumlah pengeluaran kita yang disesuaikan dengan pendapatan yang kita peroleh, lalu memilih barang yang mana yang akan kita beli, dan lainnya yang pada akhirnya membutuhkan keputusan terbaik yang akan kita ambil. Begitu pula dengan bidang yang lainnya, membantu memutuskan keputusan yang harus diambil secara tepat.

BAB V. PELUANG

Pada bab ini akan membahas tentang bagaimana cara untuk mengungkapkan pengetahuan atau kepercayaan bahwa suatu kejadian akan berlaku atau telah terjadi. Konsep peluang matematika telah dirumuskan dengan lebih ketat dalam matematika, dan kemudian digunakan secara lebih luas tidak hanya dalam matematika atau statistika, tetapi juga keuangan

BAB VI. LOGIKA

Pada bab ini akan membahas tentang logika matematika, penalaran atau landasan berpikir untuk mengambil suatu kesimpulan. Logika matematika menjadi landasan untuk memperoleh kebenaran yang didasari dengan pembuktian juga pemikiran yang rasional. Logika matematika biasanya diterapkan untuk mencari pembenaran dari suatu proporsi atau pernyataan.

DAFTAR ISI

BAB I

KONSEP BILANGAN, FPB dan KPK

A. Bilangan dan Lambangnya

Bilangan termasuk objek matematika yang digunakan untuk perhitungan, pengukuran, dan pelabelan. Bilangan merupakan istilah yang tidak didefinisikan (undefined term). Simbol atau lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut angka. Contoh angka (digit) adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9.

Penulisan lambang bilangan dengan huruf dilakukan dengan cara memisahkan tiap-tiap bagian kata.

1. Bilangan utuh
   Contoh:
   23 = dua puluh tiga
   508 = lima ratus delapan
2. Bilangan pecahan
   Bilangan pecahan memiliki setidaknya lima subkonstruksi yaitu pecahan sebagai bagian dari keseluruhan, operator, hasil bagi, pengukuran dan

rasio.

Contoh:

$\frac{1}{2}$ = setengah

$\frac{3}{4}$ = tiga perempat

$\frac{4}{16}$ = empat perenam belas

$3\frac{2}{3}$ = tiga dua pertiga

10% = sepuluh persen

Lambang bilangan yang dapat dinyatakan dengan satu atau dua kata ditulis dengan huruf (tidak dengan angka biasa), kecuali jika terdiri atas beberapa lambang bilangan yang dirinci secara berurutan sebagaimana halnya dalam bentuk paparan.

Contoh:

Dalam sehari ia makan dua kali. Usianya dua puluh tahun. Dari 50 peserta, 15 orang ikut, dan 35 orang lainnya tidak ikut. 30 remaja putri, 15 remaja putra, dan 10 balita.

Lambang bilangan pada awal kalimat harus senantiasa ditulis dengan huruf.

Contoh:

1. Enam belas tahun yang lalu ia meninggal.
2. Lima saudaranya laki-laki semua.
3. Dua ratus para calon mahasiswa diterima.

Catatan:

Harus diingat bahwa angka biasa tidak dapat diletakkan pada awal kalimat. Oleh sebab itu harus diupayakan dengan mengubah susunannya sehingga memungkinkan tidak adanya angka biasa pada awal kalimat.

B. Bilangan Cacah

Bilangan cacah merupakan himpunan bilangan asli ditambah dengan bilangan nol. Bilangan asli sendiri merupakan bilangan yang dimulai dari 1, lalu selanjutnya bertambah satu-satu. Bilangan bilangan 0, 1, 2, 3, 4, 5 dan seterusnya disebut bilangan cacah.

Bilangan ini dimulai dari angka 0, bukan angka 1. Maka sudah cukup jelas bukan bagaimana perbedaan dari jenis bilangan ini dari bilangan yang lainnya.

Selain mengerti tentang definisi, kamu juga perlu tahu apa sifat-sifat dari jenis bilangan ini. Berikut sifat-sifat operasinya:

1. Sifat tertutup

   Sifat yang satu ini berlaku jika jenis bilangan hasil operasi sama dengan jenis bilangan-bilangan yang beroperasi.

   Contoh:

   Penjumlahan bilangan-bilangan asli menghasilkan bilangan asli.
   Penjumlahan bilangan-bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat.

2. Sifat komutatif

   Sifat yang selanjutnya adalah sifat komutatif. Maksud dari sifat ini ialah jika letak bilangannya saling ditukarkan akan tetap menghasilkan hasil yang sama meskipun bilangan itu merupakan bilangan positif maupun negatif.

   Contoh:

   $r + s = s + r$ (Operasi Penjumlahan)
   $r\ x\ s = s\ x\ r$ (Operasi Perkalian)

3. Sifat asosiatif

   Sifat asosiatif ketika suatu bilangan ditambahkan ata dikalikan hasilnya akan tetap sama terlepas dari bagaimana mereka dikelompokkan.

   Contoh:

   $r + (s + t) = (r + s) + t$ (Operasi Penjumlahan)

   $r\ x\ (\ s\ x\ t) = (r\ x\ s)\ x\ t$ (Operasi Perkalian)

4. Identitas

   Identitas adalah bilangan yang jika dioperasikan dengan bilangan r, maka akan menghasilkan bilangan r.

   Contoh:

   $$r + 0 = r$$

   (Identitas pada operasi penjumlahan adalah bilangan nol)

   $$r\ x\ 1 = r$$

   (Identitas pada operasi perkalian adalah bilangan satu)

5. Sifat distributif

   Sifat distributif adalah operasi hitung yang digunakan dengan cara mengombinasikan atau menggabungkan dengan cara mengombinasikan atau menggabungkan bilangan hasil operasi dengan elemen kombinasi yang ada, atau juga dapat digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan dengan menggunakan tanda kurung "()".

   $ab\ +\ ac\ =\ a\ (b\ +\ c)$

Contoh Bilangan Cacah:

a. Bilangan Cacah Genap
   Mulai dari, 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20, dan seterusnya.
b. Bilangan Cacah Ganjil
   Mulai dari 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19, dan seterusnya.

C. Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, dan atau bentuk lainnya. Himpunan bilangan bulat dalam matematika dilambangkan dengan **Z**. Lambang ini berasal dari bahasa Jerman, yaitu Zahlen yang berarti bilangan. Bilangan bulat adalah jenis bilangan yang terdiri dari bilangan bulat positif, nol, serta bilangan bulat negatif. Pengertian bilangan bulat lainnya adalah satuan dalam matematika yang abstrak, dapat dikurangi, ditambah, atau dikalikan.

Bilangan bulat positif Adalah jenis bilangan bulat yang bernilai positif. Sering juga disebut bilangan asli. Contohnya angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan seterusnya. Bilangan bulat negatif Merupakan jenis bilangan bulat yang bernilai negatif. Contohnya angka $-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, dan\ -1$.

Bilangan bulat nol Adalah jenis bilangan bulat yang tidak memiliki nilai. Lazim juga disebut bilangan kosong, dilambangkan dengan angka nol (0).

D. Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah suatu bilangan yang bisa diubah menjadi pecahan biasa (a/b), dan jika diubah menjadi suatu pecahan desimal maka angkanya akan berhenti di suatu bilangan tertentu. Atau jika angkanya tidak berhenti maka akan membentuk suatu pola pengulangan.

Bilangan rasional mencakup beberapa jenis bilangan yaitu bilangan bulat, bilangan asli, bilangan cacah, bilangan prima dan bilangan-bilangan lain yang menjadi subset dari bilangan rasional tersebut.

Bentuk-Bentuk Bilangan Rasional:

1. Bilangan rasional berbentuk desimal dengan pengulangan angka nol. Contoh: $0{,}2500000 = 0{,}25; 0{,}50000 = 0{,}5; 0{,}400000 = 0{,}4$, dan seterusnya.
2. Bilangan rasional berbentuk desimal dengan pengulangan teratur angka bukan nol. Contoh: 0,3333; 0,111111; 0,44444; 3,636363; dan seterusnya.

Sifat Bilangan Rasional:

1. Sifat Tertutup
   a. Tertutup terhadap penjumlahan
      Pada penjumlahan bilangan rasional ab dan cd di mana a, b, c, d ∈ Q, berlaku:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{da+bc}{bd}$$

Contoh:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{(2\times 2)+(3\times 1)}{3\times 2}=\frac{7}{6}$$

b. Tertutup terhadap perkalian

Pada perkalian bilangan rasional ab dan cd di mana a, b, c, d ∈ Q, berlaku:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Contoh:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

2. Sifat Komutatif

a. Sifat komutatif terhadap penjumlahan

Pada penjumlahan bilangan rasional ab dan cd di mana a, b, c, d ∈ Q, berlaku:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Contoh:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

b. Sifat komutatif terhadap perkalian

Pada perkalian bilangan rasional ab dan cd di mana a, b, c, d ∈ Q, berlaku persamaan berikut.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

Contoh:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

3. Sifat Asosiatif

Sifat asosiatif juga berlaku pada gabungan operasi antara penjumlahan dan perkalian bilangan rasional ab, cd, dan ef di mana a, b, c, d, e, f ∈ Q seperti berikut.

$$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$$

Contoh:

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)$$

4. Sifat Identitas

   Bilangan identitas adalah bilangan yang hanya terdiri dari angka 1 atau 0-1. Bilangan rasional juga memiliki unsur identitas, di mana unsur tersebut juga harus termasuk bilangan rasional. Operasi bilangan rasional dengan unsur identitasnya akan menghasilkan bilangan rasional itu sendiri. Bilangan Irasional

E. Bilangan Irasional

Bilangan irasional adalah bilangan riil yang tidak bisa dinyatakan atau berubah bentuk menjadi pecahan biasa, pecahan campuran, dan pecahan desimal terbatas. Berbanding terbalik dengan bilangan rasional yang justru dapat dinyatakan dan diubah menjadi pecahan biasa, pecahan campuran, dan desimal terbatas. Dengan kata lain, bilangan riil yang bukan bilangan rasional disebut bilangan irasional.Jadi, bilangan irasional merupakan bilangan yang tidak dapat dinya

takan sebagai pecahan sederhana a/b maupun dalam bentuk rasio. Contoh Bilangan Irasional: misalnya π(pi), 21/2, atau e. Jika dihitung dengan kalkulator, nilai dari 21/2 atau akar 2 yaitu

1,414213562373095048801688724... artinya bilangan desimal ini tidak berulang dengan angka di belakang koma yang tak terhingga.

Tapi, tidak semua akar termasuk bilangan irasional, misalnya akar 4 yaitu 2 dan akar 9 yaitu 3. Dimana keduanya merupakan bilangan rasional.

Berikut sifat-sifat bilangan irasional: Bilangan irasional terdiri dari desimal tak berujung dan tak berulang. Bila suatu bilangan irasional dan bilangan rasional dijumlahkan, maka hasil atau penjumlahannya adalah bilangan irasional saja. Untuk bilangan irasional x, dan bilangan rasional y, hasilnya, x+y=bilangan irasional. Bila sembarang bilangan irasional dikalikan dengan bilangan rasional yang bukan nol, hasilnya adalah bilangan irasional. Untuk bilangan irasional x dan bilangan rasional y, hasil kali mereka xy = irasional. Untuk dua bilangan irasional apapun, kelipatan persekutuan terkecil (KPK) mereka mungkin ada atau tidak ada. Penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dua bilangan irasional mungkin atau mungkin bukan bilangan rasional. Bilangan riil yang bukan merupakan bilangan rasional adalah bilangan irasional.

Jika ada bilangan rasional, maka sudah pasti ada bilangan irasional. Kedua bilangan tersebut termasuk dalam anggota bilangan real atau bilangan nyata. Lalu, apa perbedaan antara bilangan rasional dan irasional? Perbedaan mendasar antara keduanya terletak pada bisa tidaknya diubah menjadi pecahan, baik pecahan murni maupun campuran. Bilangan rasional adalah bilangan yang bisa diubah menjadi bentuk pecahan ab di mana a, b ∈ Q. Sementara itu bilangan irasional adalah bilangan yang tidak bisa diubah menjadi pecahan ab. Ciri bilangan irasional adalah berupa bentuk desimal dengan deret angka yang tidak teratur dan bentuk akar yang tidak menghasilkan bilangan bulat, contoh 1,256398; 0,28759; 3; dan seterusnya.

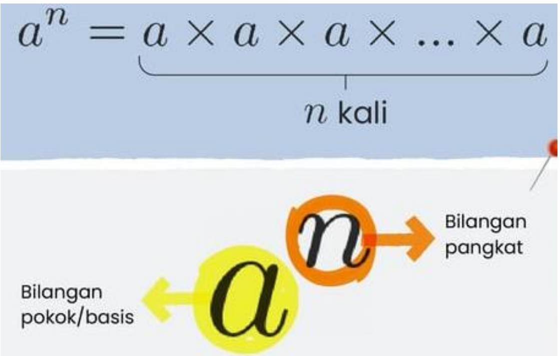
F. Bilangan Berpangkat

Bilangan berpangkat atau eksponen adalah bilangan yang dikalikan dengan dirinya sendiri hingga beberapa tingkat. Notasi pangkat digunakan untuk menuliskan berapa kali suatu bilangan dikalikan secara berulang dalam bentuk yang lebih sederhana.

Misalnya, kita memiliki faktor a yang dikalikan berulang sebanyak tiga kali, maka dapat ditulis:

$$\boldsymbol{a^3 = a\ x\ a\ x\ a}$$

Angka 3 dituliskan di sebelah kanan atas a, yang menunjukkan bahwa angka 3 ini merupakan pangkat dari a. Contohnya: $\mathbf{23 = 2\ \boldsymbol{x}\ 2\ \boldsymbol{x}\ 2 = 8}$



Bilangan berpangkat bisa terdiri atas bilangan dengan pangkat bulat positif (bilangan asli), bilangan dengan pangkat bulat negatif, bilangan dengan pangkat nol, bilangan dengan pangkat rasional, dan bilangan dengan pangkat riil.

Bilangan berpangkat atau eksponen memiliki sifat-sifat yang perlu dipahami agar bisa menyelesaikan persamaan eksponen maupun pertidaksamaan eksponen dengan lebih mudah. Berikut adalah 8 sifat eksponen:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^m = a^m b^m$
- $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$, untuk $b \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $a^0 = 1$, untuk $a \neq 0$

1. Pangkat Penjumlahan
   Jika ada perkalian eksponen dengan basis yang sama, maka pangkatnya harus ditambah. Bisa dituliskan sebagai berikut:
   $a^m x a^n = a^{m+n}$
   Contoh: $2^4 x 2^2 = 2^{4+2} = 2^6 = 64$
2. Pangkat Pengurangan

Jika ada pembagian eksponen dengan basis yang sama, maka pangkatnya harus dikurang. Bisa dituliskan sebagai berikut:

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Contoh: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 8$

3. Pangkat Perkalian

   Jika ada bilangan berpangkat yang dipangkatkan lagi, maka pangkatnya harus dikali. Bisa dituliskan sebagai berikut:

   $(a^m)^n = a^{mxn}$

   Contoh: $(2^2)^3 = 2^{2x3} = 2^6 = 64$

4. Perkalian Bilangan yang Dipangkatkan

   Jika ada perkalian bilangan yang dipangkatkan, maka masing-masing bilangan tersebut dipangkatkan juga. Bisa dituliskan sebagai berikut:

   $(a.b)^m = a^m.b^m$

   Contoh: $(2.3)^2 = 2^2.3^2$

5. Perpangkatan pada Bilangan Pecahan

   Jika ada bilangan pecahan yang dipangkatkan, maka bilangan pembilang dan penyebutnya harus dipangkatkan semua, dengan syarat $b \neq 0$, artinya penyebutnya tidak boleh sama dengan 0. Bisa dituliskan sebagai berikut:

   $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} untuk\ b \neq 0$

   Contoh: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

6. Pangkat Negatif

   Jika ada bilangan berpangkat negatif, maka nilainya sama dengan 1 per bilangan eksponen tersebut namun pangkatnya menjadi positif. Bisa dituliskan sebagai berikut:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Contoh: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

7. Pangkat Pecahan

   Jika ada bilangan berpangkat yang diakar, maka pangkat dari akarnya dapat ditulis menjadi penyebut dari pangkat bilangannya. Bisa dituliskan sebagai berikut:

   $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

   Contoh: $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

8. Pangkat Nol

   Jika ada bilangan yang berpangkat nol, maka hasilnya sama dengan 1 berapapun nilai bilangan basisnya, dengan syarat bilangan basisnya tidak sama dengan 0 ($a \neq 0$). Bisa dituliskan sebagai berikut:

   $$a^0, untuk\ a \neq 0$$

   Contoh: $2^0 = 1$

G. FPB dan KPK

Faktor suatu bilangan dapat didefinisikan sebagi bilangan-bilangan yang dapat membagi habis bilangan tersebut. Sebagai contoh yaitu faktor dari 10. Untuk menentukan faktor dari 10 maka kita harus mencari tahu terlebih dahulu bilangan-bilangan yang dapat membagi habis bilangan 10 tersebut.

- 10 habis dibagi oleh 1, karena 10 = 10 x 1 sehingga 1 merupakan pembagi dari 10
- 10 habis dibagi oleh 2, karena 10 = 5 x 2

sehingga 2 merupakan pembagi dari 10

- 10 habis dibagi oleh 5, karena 10 = 2 x 5 sehingga 5 merupakan pembagi dari 10
- 10 habis dibagi oleh 10, karena 10 = 1 x 10 sehingga 10 merupakan pembagi dari 10

Jadi, faktor dari 10 adalah 1, 2, 5, dan 10.

Yang dimaksud dengan "faktor persekutuan" adalah faktor yang sama dari dua bilangan atau lebih. Sebagai contoh, tentukan faktor persekutuan dari 15 dan 24.

Untuk dapat menentukan faktor persekutuan dua bilangan, kita harus mencari terlebih dahulu faktor dari masing-masing bilangan.

Faktor dari 15	
15 = 1 x 15	15 faktor dari 15
15 = 3 x 5	5 faktor dari 15
15 = 5 x 3	3 faktor dari 15
15 = 15 x 1	1 faktor dari 15

Sehingga diketahui faktor dari 15 yaitu 15, 5, 3, dan 1.

Faktor dari 24	
24 = 1 x 24	24 faktor dari 24
24 =2 x 12	12 faktor dari 24
24 = 3 x 8	8 faktor dari 24
24 = 4 x 6	6 faktor dari 24
24 = 6 x 4	4 faktor dari 24
24 =8 x 3	3 faktor dari 24
24 = 12 x 2	2 faktor dari 24
24 = 24 x 1	1 faktor dari 24

Sehingga diketahui bahwa faktor dari 24 yaitu

24, 12, 8, 6, 4, 3, 2 dan 1. Jadi, faktor persekutuan dari 15 dan 24 yaitu 1 dan 3.

Dengan demikian bilangan terbesar pada faktor persekutuan beberapa bilangan disebut **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB).**

Kelipatan suatu bilangan adalah perkalian bilangan asli dengan bilangan itu sendiri. Bilangan asli (N) adalah semua bilangan bulat positif yang dimulai dari 1 sampai tak hingga, atau N = {1, 2, 3, 4, 5, … }.

Misalnya kita ingin mencari kelipatan dari 3. Penyelesaiannya akan didapatkan bahwa:

1 x 3 = 3,

2 x 3 = 6,

3 x 3 = 9,

4 x 3 = 12, dan seterusnya.

Didapatkan kelipatan dari 3 yaitu 3, 6, 9, 12, …

Untuk pengertian dari kelipatan persekutuan yaitu kelipatan yang sama dari dua bilangan atau lebih.

Misalnya, tentukan kelipatan persekutuan dari 2 dan 3. Penyelesaiannya akan didapatkan sebagai berikut :

Kelipatan dari 2 adalah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, …

Kelipatan dari 3 adalah 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, …

Sehingga, kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 yaitu 6, 12, 18, …

Maka bilangan terkecil yang merupakan kelipatan dari beberapa bilangan disebut **Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)**.

Terdapat 2 metode untuk menentukan FPB dan KPK, antara lain :

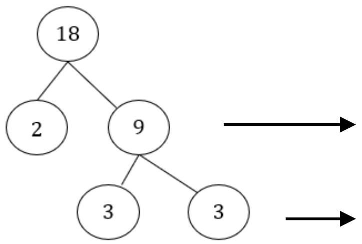
1. Metode irisan himpunan
   Dengan mendaftarkan semua bilangan dari himpunan faktor (pembagi positif) dari dua bilangan atau lebih, kemudian menentukan himpunan persekutuannya (faktor/hasil kelipatan yang sama). Untuk **FPB**, diambil sekutu bilangan yang terbesar, dan untuk **KPK** diambil dari sekutu bilangan terkecil.
2. Metode faktorisasi prima
   Dengan cara menentukan faktorisasi prima (perkalian faktor-faktor prima bilangan itu) lalu tentukan faktor sekutu prima. **FPB** dari dua bilangan atau lebih adalah hasil kali faktor-faktor sekutu, dimana yang dipilih adalah bilangan dengan **pangkat terendah antara hasil faktorisasi prim**a dari bilangan-bilangan tersebut. Untuk **KPK** dipilih dari bilangan-bilangan dengan **pangkat tertinggi antara hasil faktorisasi prima** dari bilangan-bilangan tersebut.

Contoh:
Tentukan FPB dan KPK dari 18 dan 24!
Penyelesaian:

- Metode Irisan Himpunan
  Faktor-faktor dari 18 adalah 1, 2, 3, 6, 9, 18.
  Faktor-faktor dari 24 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
  Faktor-faktor persekutuan dari 18 dan 24 adalah 1, 2, 3, 6.
  Dengan demikian, FPB dari 18 dan 24 adalah 6.
  Kelipatan 18 adalah 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, …

Kelipatan 24 adalah 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, ...
Kelipatan persekutuan dari 18 dan 24 adalah 72, 144, 216, ...
Dengan demikian, KPK dari 18 dan 24 adalah 72.

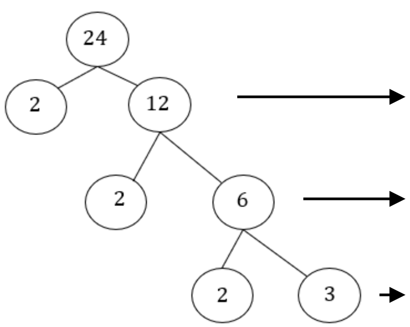
- Metode Faktorisasi Prima (Menggunakan Pohon Faktor)



$2 x 9 = 18$

$3 x 3 = 9$

Faktorisasi prima dari 18 yaitu $2 x 3^2$.



$2 x 12 = 24$

$2 x 6 = 12$

$2 x 3 = 6$

Faktorisasi prima dari 24 yaitu $2^3 x 3$.
Jadi, FPB dari 18 dan 24 yaitu $2 x 3 = 6$. Dan KPK dari 18 dan 24 yaitu $2^3 x 3^2 = 8 x 9 = 72$.

H. Soal dan Latihan

1. Pemerintah membagikan sembako berupa beras sebanyak 8 truk. Setiap truk berisi 150 karung beras. Sembako tersebut akan dibagikan kepada 50 Desa. jika sembako dibagikan secara merata

dengan berat yang sama, maka setiap desa akan mendapatkan berapa karung beras?

Pembahasan:

Diketahui:

Banyaknya truk = 8 buah

Satu truk berisi = 150 kantung beras

Banyak desa = 50

Ditanya: banyak kantung beras untuk setiap desa = ...?

Beras perdesa = Banyak truk x banyak beras satu truk : banyak desa

= 8 x 150 : 50

= 1.200 : 50

= 24

Jadi, banyak beras yang akan diterima oleh setiap desa adalah 24 kantung.

2. Tami mempunyai sebuah pita panjang, panjang dari pita tersebut adalah 2,7 m. Tami memberikan ¾ m kepada Dina, 0,8 m kepada Tina, dan 0,85 m kepada Moni. Sisa panjang pita Tini sekarang adalah....

   Pembahasan:

   Diketahui:

   Panjang pita Tami = 2,7 m

   Pita Dina = ¾ m = 0,75 m

   Pita Tina = 0,8 m

   Pita Moni = 0,85 m

   Ditanya: Sisa panjang pita Tami =....?

   Tinggal kurangi pita awal dengan pita yang diberikan kepada teman-teman nya.

Sisa pita = 2,7 - 0,75 - 0,8 - 0,85 = 0,3
Jadi, sisa pita Tami adalah 0,3 m.

3. Hasil dari $5(\sqrt{3} + 2\sqrt{12})$ adalah...
   Pembahasan:
   $5(\sqrt{3} + 2\sqrt{12})$
   $= 5(\sqrt{3} + 2\sqrt{4x3})$
   $= 5(\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$
   $= 5\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$
   $= (5+20)\sqrt{3}$
   $= 25\sqrt{3}$

4. Hasil dari $4^{-2} + 4^{-3}$ adalah...
   Pembahasan:
   $$4^{-2} + 4^{-3} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$$
   $$\leftrightarrow \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$$
   $$\leftrightarrow \frac{4}{64} + \frac{1}{64}$$
   $$\leftrightarrow \frac{5}{64}$$

5. Diketahui bilangan berpangkat seperti di bawah ini:
   $$\frac{a^2 \times a^4 \times a^6 \times a^8 \times a^{10}}{a^1 \times a^3 \times a^5 \times a^7 \times a^9}$$
   Bentuk sederhana dari bentuk tersebut adalah....
   Pembahasan:
   $$\frac{a^2 \times a^4 \times a^6 \times a^8 \times a^{10}}{a^1 \times a^3 \times a^5 \times a^7 \times a^9} = \frac{a^{2+4+6+8+10}}{a^{1+3+5+7+9}}$$

$\leftrightarrow \dfrac{a^{30}}{a^{25}}$

$\leftrightarrow a^{30-25}$

$\leftrightarrow a^{5}$

6. Stella membeli dua meteran untuk menjahit dengan panjang masing-masing 18 cm dan 30 cm. Ternyata meteran yang dibeli terlalu panjang dan harus dipotong menjadi beberapa bagian sama besar. Berapa ukuran terpanjang pada meteran yang akan didapatkan?

   Pembahasan:

   Panjang meteran pertama 18 cm = 2 x 3^2

   Panjang meteran kedua 30 cm = 2 x 3 x 5

   FPB = 2 × 3 = 6

   Jadi, ukuran meteran yang paling panjang pada setiap bagian adalah 6 cm.

7. Janita mempunyai kebiasaan pergi ke minimarket untuk membeli barang kebutuhan sehari-hari setiap 4 hari sekali, Rian pergi ke minimarket setiap 6 hari sekali. Apabila Janita dan Rian berbelanja ke minimarket berangkat bersama pada hari Selasa, kapan mereka akan bertemu kembali di minimarket untuk berbelanja?

   Pembahasan:

   Janita ke minimarket setiap 4 hari sekali = 2^2 hari

   Rian ke minimarket setiap 6 hari sekali = 2×3

   KPK = 2^2 × 3 = 12

   Janita dan Rian pergi bersama ke minimarket pada hari Selasa.

Mereka akan bertemu di minimarket untuk belanja bersama lagi = Selasa + 12 hari.
Jadi, mereka akan bertemu di minimarket pada hari Minggu.

BAB II

ALJABAR

A. Himpunan

Definisi: Suatu himpunan adalah suatu kumpulan objek yang terdefinisi dengan baik.

Dari definisi di atas, hal yang perlu ditekankan adalah kata-kata terdefinisi dengan baik. Maksud dari kata-kata tersebut adalah bahwa ketika kita akan menentukan apakah suatu kumpulan objek disebut himpunan atau tidak, dapat terlihat dengan mudah bahwa anggota-anggotanya (disebut juga elemen atau unsur) termasuk dalam himpunan itu atau tidak.

Untuk penulisan himpunan itu sendiri sebenarnya ada beberapa metode untuk menuliskannya. Namun, dalam modul ini hanya akan memakai metode mendaftar semua anggotanya di antara dua tanda kurung kurawal dan masing-masing anggotanya dipisahkan oleh tanda koma. Untuk penamaan himpunan biasanya digunakan huruf besar (huruf kapital) sedangkan untuk penamaan anggotanya digunakan huruf kecil. Misalnya jika x adalah anggota dari himpunan X, maka kita tuliskan sebagai $x \in X$. Namun jika x bukan anggota dari himpunan X, maka kita tuliskan sebagai $x \notin X$.

Contoh:

1. Suatu himpunan yang memuat bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 dituliskan sebagai {1,2,3,4,5,6}.
2. Himpunan {1,6, {mawar}, {3,4,5}} terdiri dari empat anggota, yaitu bilangan 1, bilangan 6, {mawar}, dan {3,4,5}.

Dalam hal contoh himpunan bilangan, berikut akan diberikan beberapa contoh himpunan bilangan yang sering digunakan.

1. Himpunan bilangan asli, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
2. Himpunan bilangan cacah ditulis $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
3. Himpunan bilangan bulat, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
4. Himpunan bilangan rasional ($\mathbb{Q}$) adalah himpunan semua bilangan ang berbentuk $\frac{p}{q}$ dengan p dan q adalah bilangan bulat, serta $q \neq 0$. Contoh bilangan rasional, yaitu $\frac{1}{2}$, 3, dan $\frac{26}{7}$. 2,75 juga termasuk bilangan rasional. Contoh lainnya, yaitu bilangan desimal berulang seperti 2,3535353535….
5. Himpunan bilangan irasional adalah himpunan bilangan bukan rasional. Contohnya, $\sqrt{3}$ dan π.
6. Himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$) merupakan

gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional. Suatu bilangan rasional dapat direpresentasikan ke dalam bilangan desimal di mana pola bilangan di belakang koma berulang mengikuti suatu pola, sedangkan bilangan irasional tidaklah demikian.

7. Himpunan bilangan kompleks, $\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$.

Selain contoh himpunan di atas, dikenal pula himpunan kosong (empty set) yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi: Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong dan dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$.

Untuk memperjelas pemahaman kita mengenai himpunan kosong ada baiknya kita pahami penjelasan berikut.

$\{\emptyset\}$ adalah himpunan yang memuat himpunan kosong. Himpunan ini hanya mempunyai satu anggota. Perhatikan bahwa kita boleh menuliskan $\emptyset \in \{\emptyset\}$, namun tidak benar bahwa $\emptyset \in \emptyset$.

Selanjutnya, kita akan belajar mengenai relasi dua himpunan dan belajar mengenai kardinalitas (banyaknya anggota) suatu himpunan.

Definisi: Dua himpunan dikatakan sama jika keduanya memiliki anggota-anggota yang sama. Jika himpunan X sama dengan himpunan Y, maka kita tuliskan $X = Y$. Jika kedua himpunan tersebut tidak sama, maka dituliskan $X \neq Y$.

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

1. Himpunan $\{5,7,8\}$ sama dengan himpunan $\{7,8,5\}$.
2. Himpunan $\mathbb{R}$ tidak sama dengan himpunan $\mathbb{N}$, yakni $\mathbb{R} \neq \mathbb{N}$.

Definisi: Jika himpunan X memiliki anggota yang berhingga banyaknya, maka dikatakan bahwa X adalah himpunan hingga. Jika X himpunan hingga, maka banyaknya anggotanya disebut sebagai kardinalitas dari $\boldsymbol{X}$ dan dinotasikan dengan $|X|$.

Sebagai contoh, himpunan $\{2, 3, 5, 7\}$ memiliki kardinalitas 4. Jadi, $|X| = 4$.

Selanjutnya kita akan membahas dua relasi yang penting antardua himpunan, yakni subset dan proper subset.

Definisi: Misalkan X suatu himpunan. Suatu himpunan Y dikatakan himpunan bagian (subset) dari X jika setiap anggota dari Y adalah anggota dari X dan dinotasikan sebagai $Y \subseteq X$. Suatu subset Y dari X dikatakan proper subset dari X jika $Y \neq X$ dan dinotasikan sebagai $Y \subset X$.

Untuk memperdalam pemahaman kita mengenai subset dan proper subset, marilah kita pahami contoh berikut.

1. Himpunan $Y = \{1, 2, 3\}$ adalah subset dari himpunan $X = \{1,2,3,\{3,4\}\}$, namun himpunan $\{1,2,3\}$ bukan subset dari himpunan $\{2,3,4\}$ atau $\{2,3\}$.
2. Himpunan $\{1,2,5\}$ adalah proper subset dari $\{-6,0,1,2,3,5\}$. Namun untuk sebarang himpunan X, himpunan bagian X bukanlah

proper subset dari X

Selanjutnya untuk pembahasan operasi pada himpunan, pada modul ini dibatasi pada operasi gabungan (union), irisan (intersection), selisih (difference), komplemen (complement), dan perkalian.

Definisi: Misalkan X dan Y adalah himpunan.

1. Gabungan dari Xdan Y, dinotasikan $X \cup Y$, adalah suatu himpunan yang terdiri dari anggota-anggota di X atau di Y, atau di keduanya, yakni $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ atau } y \in Y\}$.
2. Irisan dari X dan Y, dinotasikan $X \cap Y$, adalah suatu himpunan yang terdiri dari anggota-anggota X dan anggota-anggota Y, yakni $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ dan } y \in Y\}$.
3. Selisih dari X dan Y, dinotasikan $X \backslash Y$, adalah himpunan unsur-unsur (anggota) yang berada di X namun tidak berada di Y. Dengan kata lain kita membuang unsur-unsur Y yang berada di X. Jika Y subset dari X, maka $X \backslash Y$ disebut juga sebagai komplemen dari Y di X dan dinotasikan sebagai $Y\ c$.
4. Perkalian dari X dan Y, dinotasikan $X \times Y$, adalah himpunan semua pasangan (x, y) yang mungkin di mana $x \in X$ dan $y \in Y$, yakni $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ dan } y \in Y\}$.

Selanjutnya, untuk memperdalam pemahaman kita mengenai gabungan, irisan, subset, proper subset, selisih, komplemen, dan perkalian pada himpunan, perhatikan contoh-contoh berikut.

Misalkan $A = \{1,2,6\}$ dan $B = \{2,3,7\}$. Maka

1. Gabungan dari A dan B adalah $A \cup B$ = {1,2,3,6,7},
2. Irisan dari A dan B adalah $A \cap B$ = {2},
3. Selisih dari A dan B adalah $A \backslash B$ = {1,6},
4. Komplemen dari A adalah $A\ c$ = {3,4,5,7,8,9,10},
5. Perkalian dari A dan B adalah $A \times B$ = {(1,2), (1,3), (1,7), (2,2), (2,3), (2,7), (6,2), (6,3), (6,7)}.

B. Fungsi

Definisi: Misalkan A dan B adalah himpunan. Sebuah fungsi atau pemetaan dari A ke B adalah suatu hubungan (asosiasi) antar anggota dari dua himpunan tersebut. Lebih tepatnya yaitu untuk setiap anggota dari A terdapat tepat satu anggota dari B.

Jika f suatu fungsi dari A ke B, maka dapat dituliskan $f\colon A \rightarrow B$. Himpunan A disebut sebagai domain dari f sedangkan himpunan B disebut sebagai kodomain dari f.

Untuk memberikan gambaran penjelasan di atas, ada baiknya kita pelajari contoh berikut dengan saksama.

1. Misalkan $f\colon \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x\ 2$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa ada anggota dari kodomain yang tidak mempunyai pasangan dari domain.
2. Kardinalitas dari suatu himpunan adalah suatu fungsi pada himpunan dari himpunan hingga. Yakni, $|\ |$: {Himpunan Hingga} $\rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$. Perhatikan bahwa kita memerlukan angka 0

pada kodomain karena himpunan kosong juga merupakan anggota domain.

3. Bentuk $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ tidak mendefinisikan suatu fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ karena f tidak terdefinisi untuk $x = 1$.

Selanjutnya, apabila ditanyakan apakah domain alami itu? Domain alami adalah domain terbesar yang membuat suatu fungsi menjadi terdefinisi. Perhatikan contoh 3) di atas. Agar f merupakan suatu fungsi, maka harus ada pembatasan (restriksi) pada domain, yakni $\mathbb{R}$ diretsriksi menjadi $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

Macam-Macam Fungsi

1. Fungsi Konstan

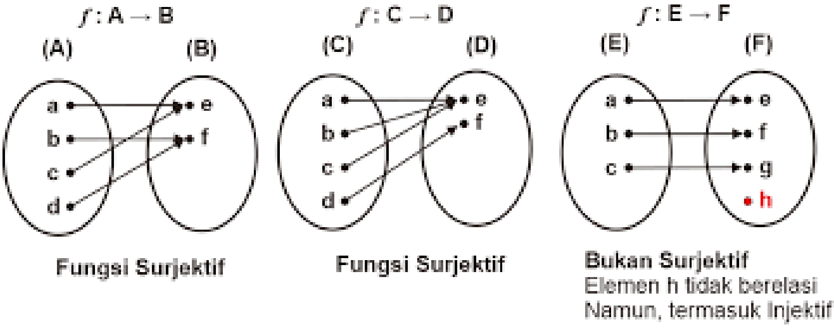
   Definisi: Misal A dan B adalah sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B atau $f: A \to B$. Jika setiap anggota himpunan A dipasangkan pada hanya satu anggota himpunan B, dengan kata lain range mempunyai satu anggota atau $Rf = \{c\}$ dengan $c \in B$, dengan kata lain $f(x) = c$, $\forall x \in A$ maka fungsi f disebut fungsi konstan.

2. Fungsi Identitas

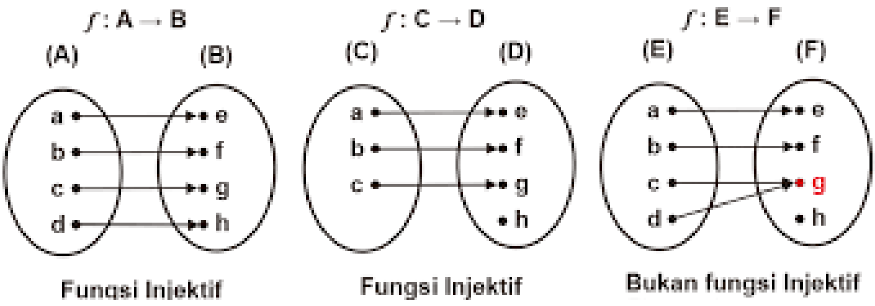
   Definisi: Misalkan A adalah sebarang himpunan. Misal f adalah fungsi dari himpunan A ke A atau $f: A \to A$. Jika setiap anggota himpunan A dipasangkan oleh f kepada dirinya sendiri, dengan kata lain $f(x) = x$, $\forall x \in A$, maka fungsi f disebut fungsi identitas.

3. Fungsi Surjektif (kepada atau onto)

   Definisi: Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Fungsi f dikatakan sebagai fungsi surjektif apabila untuk setiap y anggota himpunan B ada x anggota himpunan A sehingga y merupakan bayangan dari x. Dengan kata lain, $\forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)$.

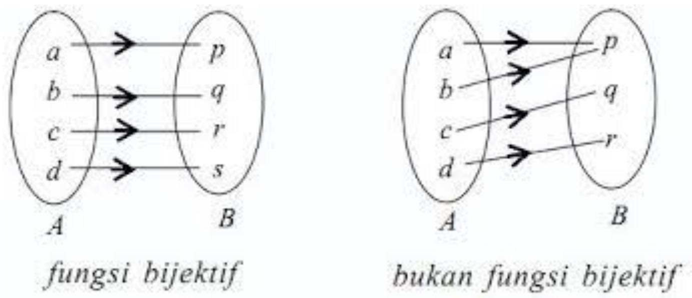


4. Fungsi Injektif (satu-satu)
   Definisi: Misal A dan B adalah sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Fungsi f dikatakan fungsi injektif jika $\forall x1, x2 \in A$ dengan $x1 \neq x2$, maka $f(x1) \neq f(x2)$. Dengan kata lain, $\forall x1, x2 \in A$ dengan $f(x1) = f(x2)$ maka $x1 = x2$.



5. Fungsi Bijektif (satu-satu dan onto)

   Definisi: Misal A dan B adalah sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Fungsi f dikatakan fungsi bijektif jika f adalah fungsi surjektif dan injektif.



Kesamaan Dua Fungsi

Definisi: Misal A dan B adalah sebarang himpunan. Misal f dan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Fungsi f dan g dikatakan sama jika Df = Dg dan $f(x)$ = $g(x)$ untuk setiap x dalam domain persekutuan.

Komposisi Fungsi

Definisi: Misalkan A, B dan C adalah sebarang himpunan. Misal f: $A \to B$ dan g: $B \to C$. Jika $a \in A$, maka bayangan a oleh f dapat ditulis sebagai $f(a)$ = $b \in B$. Selanjutnya untuk setiap $b \in B$ atau $f(a) \in B$, bayang b oleh g ditulis sebagai $g(b)$ = $c \in C$ atau $g(f(a))$ = $c \in C$.

C. Fungsi Linear

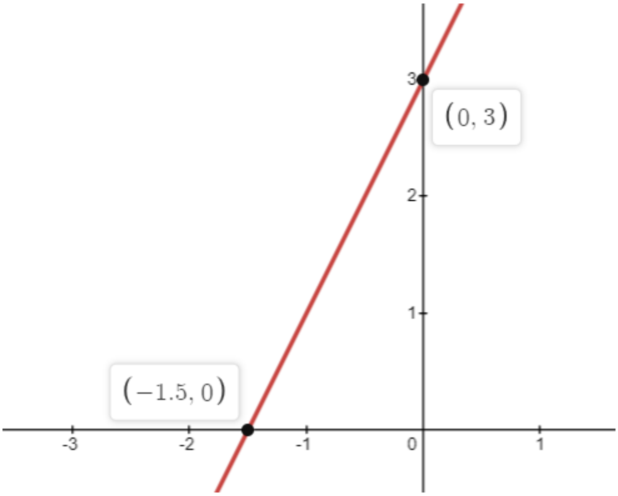
Definisi: Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi linier apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.

Contoh: Jika diketahui $f(x) = 2x + 3$, gambarlah grafiknya.

Penyelesaian:

Untuk $x = 0 \longrightarrow f(x) = y = 3$.

Untuk $y = f(x) = 0 \longrightarrow \mathrm{x} = -1\frac{1}{2}$



Grafik fungsi linear $f(x) = 2x + 3$

Contoh: Suatu fungsi dinyatakan dengan $f(x) = ax + b$. Jika nilai dari $f(4) = 11$ dan $f(6) = 15$, maka tentukan fungsi tersebut.

Penyelesaian:

$f(x) = ax + b$

$f(4) = 4a + b = 11$ ... (1)

$f(6) = 6a + b = 15 \ldots (2)$

Dengan metode eliminasi dan substitusi diperoleh $a = 2$ dan $b = 3$. Sehingga rumus fungsinya adalah $f(x) = 2x + 3$.

D. Persamaan Linear

Persamaan linier satu variabel

Bentuk umum:

$$ax + b = 0;\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Contoh: $-4x + 8 = 0$.

Persamaan linier dua variabel

Bentuk umum:

$$ax + by = c;\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

Contoh: $6x - 3y = 9$ merupakan persamaan linier dua variabel dengan variabel x dan variabel y.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linear $\frac{2x-1}{5} = \frac{x+1}{2}$.

Penyelesaian:

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{x+1}{2}$$

$\leftrightarrow 2(2x-1) = 5(x+1)$

$\leftrightarrow 4x - 2 = 5x + 5$

$\leftrightarrow 4x - 5x = 2 + 5$

$\leftrightarrow -x = 7$

$\leftrightarrow x = -7$

$HP = \{-7\}$

E. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk umum:

$ax + by = 0$

$px + qy = 0$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ dengan cara gabungan antara eliminasi dan substitusi

Penyelesaian:

$$\begin{array}{r} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 10 \\ \hline 5x = 15 \\ x = 3 \end{array} +$$

$x = 3$ substitusikan ke $3x - y = 5$

$\leftrightarrow 3(3) - y = 5$

$\leftrightarrow 9 - y = 5$

$\leftrightarrow -y = 5 - 9$

$\leftrightarrow -y = -4$

$\leftrightarrow y = 4$

Jadi, $HP = \{(3,4)\}$

F. Persamaan Kuadrat

Bentuk umum: $ax\ 2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$

Penyelesaian persamaan kuadrat

1. Memfaktorkan

   Contoh: Selesaikan $x^2 - 5x + 6 = 0$.

   Penyelesaian:

   $x^2 - 5x + 6 = 0$

   $\leftrightarrow (x - 3)\ (x - 2) = 0$

   $\leftrightarrow x - 3 = 0$ atau $x - 2 = 0$

   $x = 3$ atau $x = 2$

   Jadi, $HP = \{2,3\}$

2. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Contoh: Selesaikan x 2 + 10x + 21 = 0.

Penyelesaian:

$x^2 + 10x + 21 = 0$

$\leftrightarrow x^2 + 10x = -21$

$\leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = -21 + 25$

$\leftrightarrow (x + 5)^2 = 4$

$\leftrightarrow x + 5 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\leftrightarrow x + 5 = 2 \; atau \; x + 5 = -2$

$x = -3 \; atau \; x = -7$

3. Dengan Rumus ABC

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a}$$

Contoh:

Selesaikan $x^2 + 6x - 16 = 0$.

Penyelesaian:

$a = 1, b = 6, c = -16$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \; atau \; x_2 = \frac{-6 - 10}{2}$$

$$= \frac{-16}{2} = -8$$

$Jadi, HP: \{2, -8\}$

G. Pertidaksamaan Linear

Bentuk umum:

$$\text{ax} + \text{b}(\mathbb{R})0;\ \text{a}, \text{b} \in \mathbb{R}, \text{a} \neq 0$$

$(\mathbb{R}) =$ salah satu relasi pertidaksamaan $(<, >, \leq, \geq)$

Sifat-sifat pertidaksamaan

1. Arah tanda pertidaksamaan tetap jika ruas kiri dan ruas kanan pertidaksamaan ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.
   a. $a > b \rightarrow a + b > b + c$
   b. $a > b \rightarrow a - d > b - d$
   c. $a > b\ dan\ c > 0 \rightarrow ac > bc$
   d. $a > b\ dan\ d > 0 \rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$
2. Arah tanda pertidaksamaan berubah jika ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama.
   a. $a > b\ dan\ c < 0 \rightarrow ac < bc$
   b. $a > b\ dan\ d < 0 \rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$

Selang (interval)

Selang adalah himpunan bagian dari bilangan real yang mempunyai sifat relasi tertentu. Jika batas-batasnya merupakan bilangan real maka dinamakan selang hingga. Jika bukan bilangan real maka dinamakan selang tak hingga (∞). Lambang ∞ menyatakan membesar tanpa batas dan lambang -∞ menyatakan mengecil tanpa batas. Contoh dari bermacammacam selang dapat dilihat pada tabel berikut

Notasi	Definisi	Grafik	Keterangan
(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a (b)	Selang terbuka
[a,b]	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a [b]	Selang tertutup
[a,b)	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a [b)	Selang setengah terbuka
(a,b]	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a (b]	Selang setengah terbuka
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a (	Selang terbuka
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	a [	Selang tertutup
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b)	Selang terbuka
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b]	Selang tertutup
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$		Selang terbuka

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $6x + 4 \geq 4x + 20$, $x \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian:

$6x + 4 \geq 4x + 20$

$\leftrightarrow 6x + 4 - 4 \geq 4x + 20 - 4$

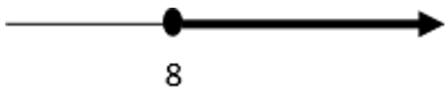
$\leftrightarrow 6x \geq 4x + 16$

$\leftrightarrow 6x - 4x \geq 4x - 4x + 16$

$\leftrightarrow 2x \geq 16$

$\leftrightarrow \frac{1}{2} . 2x \geq \frac{1}{2} . 16$

$\leftrightarrow x \geq 8$



$Jadi, HP: \{x | x \geq 8, x \in \mathbb{R}\}$.

H. Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk umum:

$$ax\,2 + bx + c(R)0;\ a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0$$

($\mathbb{R}$) = salah satu relasi pertidaksamaan $(<, >, \leq, \geq)$

Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut:

1. Ubah bentuk pertidaksamaan ke dalam bentuk umum
2. Tentukan pembuat nol pada ruas kiri
3. Letakkan pembuat nol pada garis bilangan
4. Substitusi sembarang bilangan pada pertidaksamaan kecuali pembuat nol. Jika benar, maka daerah yang memuat bilangan tersebut merupakan daerah penyelesaian.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian:

1. $x^2 + 6x + 8 \geq 0$
2. Pembuat Nol

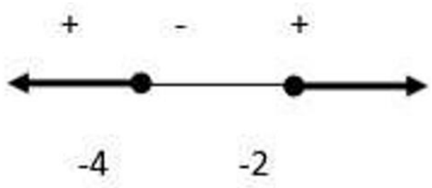
   $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

   $\leftrightarrow (x + 4)(x + 2) = 0$

$\leftrightarrow x + 4 = 0 \; atau \; x + 2 = 0$

$\leftrightarrow x = -4 \; atau \; x = -2$

3. B S B



4. Ambil $x = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 8 \geq 0$

$$8 \geq 0 \; (B)$$

5. $Jadi, HP: \{x | x \leq -4 \; atau \; x \geq -2\}$

I. Soal dan Latihan

1. Suatu fungsi dinyatakan dengan $f(x) = ax + b$. Jika nilai dari $f(2) = 7$ dan $f(5) = 16$, maka tentukan fungsi tersebut.

Pembahasan:

$f(x) = ax + b$

$$\begin{array}{ll} f(2) = a(2) + b = 7 \rightarrow & 2a + b = 7 \\ f(5) = a(5) + b = 16 \rightarrow & \underline{5a + b = 16} \; - \\ & -3a = -9 \\ & a = 3 \end{array}$$

$2a + b = 7$

$2(3) + b = 7$

$6 + b = 7$

$b = 7 - 6$

$b = 1$

Jadi, persamaan fungsi liniernya adalah $f(x) = 3x + 1$.

2. Diketahui persamaan linear dua variabel $6p - 5q = 11$. Jika nilai p adalah 6, maka nilai q adalah...

   Pembahasan:

   $6p - 5q = 11, \textit{ganti p dengan } 6$

   $6(6) - 5q = 11$

   $36 - 5q = 11$

   $-5q = 11 - 36$

   $-5q = -25$

   $q = -25/-5$

   $q = 5$

3. $\frac{x}{x-4} + \frac{3}{x+4} = 0$

   Nilai dari 2a + b – c adalah

   Pembahasan:

   Mula-mula, kamu harus mengarahkan persamaan pada soal ke dalam bentuk umumnya.

$$\frac{x}{x-4} + \frac{3}{x+4} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{x(x+4) + 3(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 3x - 12}{(x-4)(x+4)} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{x^2 + 7x - 12}{(x-4)(x+4)} = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 + 7x - 12 = 0$$

   Dari bentuk umum di atas diperoleh $a = 1, b = 7, c = -12$. Dengan demikian, nilai $2a + b - c =$

$2(1) + 7 - (-12) = 21$

Jadi, nilai $2a + b - c = 21$

4. Buatlah daerah penyelesaian dari pertidaksamaan berikut $x + y \leq 6, 2x + 3y \leq 12, x \geq 1, y \geq 0$

Pembahasan:

Langkah pertama tentukan titik

x + y ≤ 6

x + y = 6

(0,6) dan (6,0)

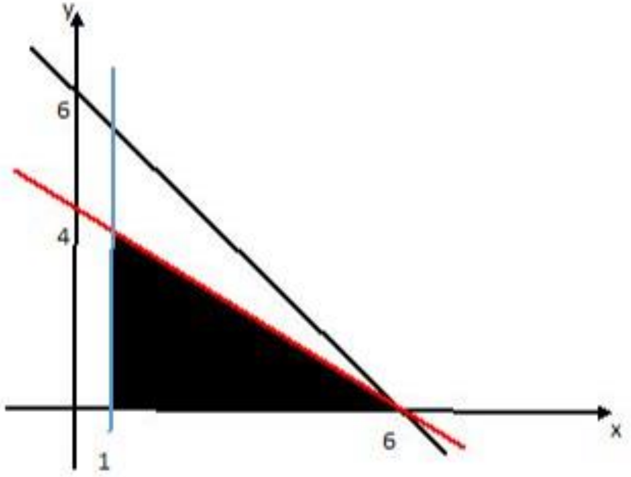
2x + 3y ≤ 12

2x + 3 y = 12

Nilai x: jika y = 0, maka menjadi 2x = 12, x = 6

Nilai y: jika x = 0, maka menjadi 3y = 12, y = 4

(0,4) dan (6,0)



5. Solusi dari pertidaksamaan $2x(x + 1) > (x + 1)(x + 2)$ adalah...

Pembahasan:

Untuk menyelesaikan bentuk pertidaksamaan di atas, kita bisa sederhanakan bentuknya sampai ke bentuk umum pertidaksamaan kuadrat, yakni:

$2x(x+1) > (x+1)(x+2)$

$2x^2 + 2x > x^2 + 2x + x + 2$

$2x^2 + 2x > x^2 + 3x + 2$

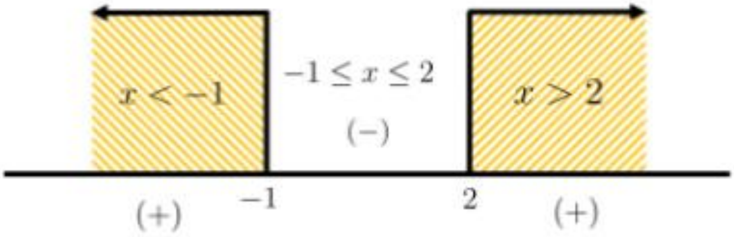
$2x^2 - x^2 + 2x - 3x - 2 > 0$

$x^2 - x - 2 > 0$

$(x-2)(x+1) > 0$

$x = 2 \; atau \; x = -1$

Selanjutnya, dari hasil yang diperoleh di atas, kita peroleh garis bilangannya seperti berikut ini:



Dari hasil di atas kita peroleh himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat yang diberikan dalam soal adalah $x < -1$ atau $x > 2$.

BAB III

GEOMETRI

A. Geometri

Geometri adalah bagian dari matematika yang di dalamnya mempelajari tentang konsep bentuk, ukuran, ruang, posisi, dan arah. Sejak dini anak-anak sudah dikenalkan dengan benda-benda dengan bentuk dan ragam yang berbeda-beda termasuk bentuk geometri, misalnya koin, lemari, meja, buku, bola ataupun benda lainnya yang terdapat di kehidupan sehari-hari mereka. Geometri memiliki kaitan yang erat dengan permasalahan dalam keseharian anak, sebab faktanya segala visualisasi yang ada di muka bumi ini adalah sebuah geometri.

Mengenal bentuk-bentuk geometri pada anak usia dini dapat dilakukan dengan mulai mengajarkan mengenai bagaimana membangun konsep geometri dengan mengidentifikasikan ciri-ciri bentuk geometri.

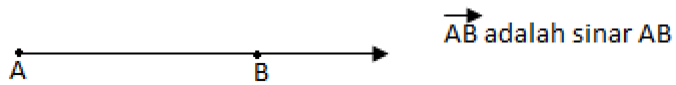
B. Istilah dalam Geometri

Adapun istilah-istilah yang sering di pakai adalah sebagai berikut:

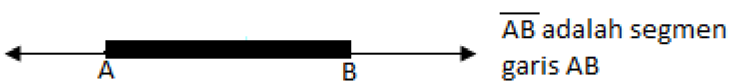
1. Postulat/ Aksioma adalah suatu kebenaran yang tidak perlu dibuktikan contoh: melalui 2 titik yang berbeda terdapat tepat satu garis, dan melalui 1 titik terdapat sekurang-kurangnya 2 garis yang berbeda
2. Teorema adalah suatu kebenaran yang perlu di buktikan contoh: melalui suatu titik P terdapat tepat 1 garis yang tegak lurus suatu garis A. Teorema akan dibuktikan dari Aksioma atau Teorema yang mendahuluinya.
3. Dalil mempunyai kesamaan dengan teorema hanya beda nama.
4. Definisi adalah suatu proposisi yang berbentuk (secara umum) Jika P maka Q, dan Jika Q maka P yang kebenarannya tidak perlu dibuktikan contoh:

    a. Segitiga adalah bangun datar yang memiliki 3 sisi,
    b. Jika P adalah suatu titik pada garis A maka terdapat tepat 1 garis yang melalui P yang tidak memuat titik pada garis A
5. Titik adalah sesuatu yang tidak mempunyai ukuran tetapi dapat menentukan posisi sesuatu, gambar titik disebut noktah. contoh: titik 0 (nol) km pada kota denpasar adalah patung catur muka.
6. Garis adalah suatu yang memiliki ukuran panjang tetapi tidak mempunyai ukuran lebar atau tebal contoh:

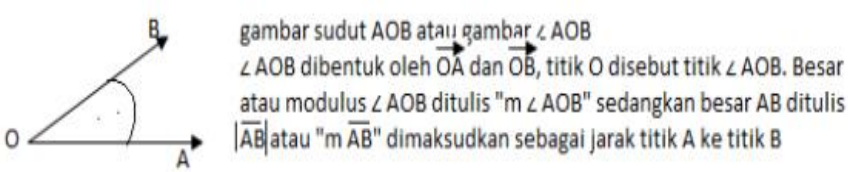
7. Sinar adalah separuh garis (halfline) sehingga sinar memiliki 1 arah. contoh:



8. Segmen garis / Penggal garis adalah bagian dari suatu garis sedemikian sehingga menunjukkan suatu jarak. contoh:



9. Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh 2 sinar yang berpotongan.
   Contoh:



10. Keliling suatu bangun geometri merupakan jumlah panjang semua sisinya.
11. Luas suatu bangun datar adalah jumlah satuan luas yang dapat menutupi habis bangun datar dengan tanpa celah dan tanpa bertumpuk.
12. Volume bangun ruang adalah banyaknya isi ruang yang digunakan oleh suatu bangun.

C. Bangun Datar

1. Pengertian Bangun Datar

Bangun datar adalah bagian dari bidang

datar yang dibatasi oleh garis garis lurus atau lengkung. Bangun datar dapat didefinisikan sebagai bangun yang rata yang mempunyai dua demensi yaitu panjang dan lebar, tetapi tidak mempunyai tinggi atau tebal.

Berdasarkan pengertian tersebut dapat ditegaskan bahwa bangun datar merupakan bangun dua demensi yang hanya memiliki panjang dan lebar, yang dibatasi oleh garis lurus atau lengkung Bangun Datar juga merupakan sebuah bangun berupa bidang datar yang dibatasi oleh beberapa ruas garis. Jumlah dan model ruas garis yang membatasi bangun tersebut menentukan nama dan bentuk hangun datar tersebut.

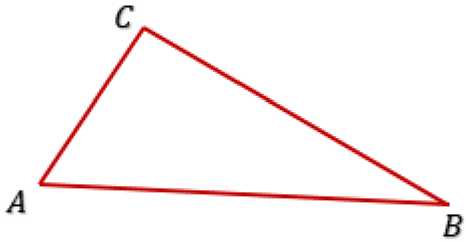
Misalnya:

a. Bidang yang dibatasi oleh 3 ruas garis, disebut bangun segitiga.
b. Bidang yang dibatasi oleh 4 ruas garis, disebut bangun segiempat.
c. Bidang yang dibatasi oleh 5 ruas garis, disebut bangun segilima

2. Segitiga

a. Pengertian Segitiga

Segitiga adalah bangun datar yang terjadi dari tiga ruasgaris yang setiap dua ruas garis bertemu ujungnya. Tiap ruas garis yang membentuk segitiga disebut sisi. Pertemuan ujung-ujung ruas garis disebut titik sudut.

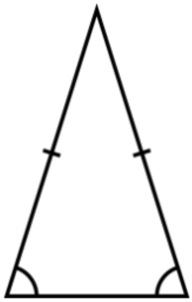


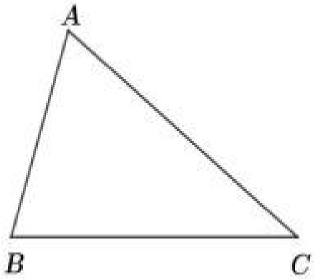
b. Unsur-Unsur Bangun Segitiga

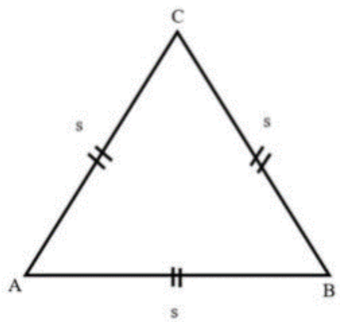
Sisi (berupa ruas garis yang membentuk segitiga) adalah butas yang membedakan bagian dalam dengan bagian luar.

Titik sudut adalah perpotongan antara dua ruas garis atau pertemuan ujung-ujung ruas garis.

Titik puncak suatu segitiga adalah titik sudut yang berhadapan dengan alas dari segitiga tersebut.



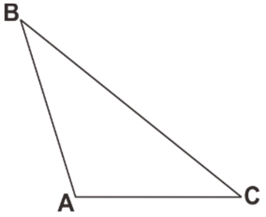




3. Macam-Macam Segitiga

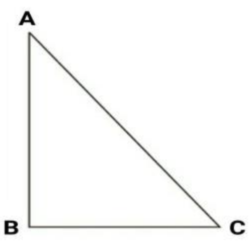
Dibawah ini macam-macam segitiga berdasarkan sudutnya

a. Segitiga Lancip



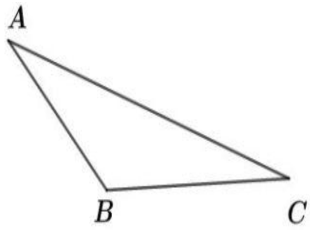
Keterangan:
0° ∠ CAB ∠ 90°
0° ∠ ABC ∠ 90°
0° ∠ BCA ∠ 90 °

b. Segitiga Siku-Siku



Ketereangan:
CBA = 90°

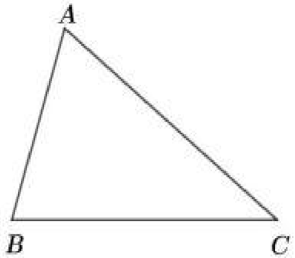
c. Segitiga Tumpul



Keterangan:
90° ∠ CBA ∠ 18

Dibawah ini macam-macam segitiga berdasarkan panjang sisinya

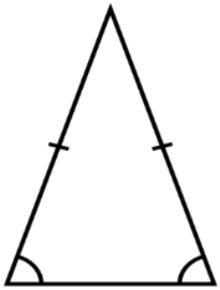
d. Segitiga Sembarang



.
Segitiga sembarang yaitu segitiga yang panjang ketiga sisinya berbeda.
Sifat segitiga sembarang:

- Besar ketiga sudutnya berbeda
- Panjang ketiga sisinya berbeda

e. Segitiga Samakaki

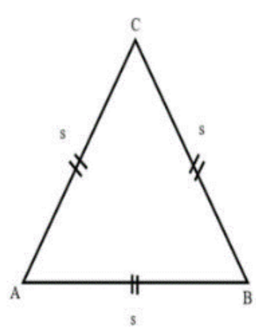


Segitiga samakaki yaitu segitiga yang tepat dua sisinya sama Panjang

Sifat segitiga samakaki:

- Sudut-sudut pada kakinya sama besar
- Dua sisinya sama panjang

f. Segitiga Samasisi



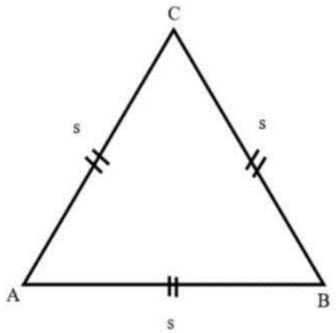
Segitiga samasisi yaitu segitiga yang ketiga sisinya sama Panjang

Sifat segitiga sama sisi:

Semua sudutnya sama besar, yaitu 60°.

Semua sisinya sama panjang.

4. Luas Segitiga

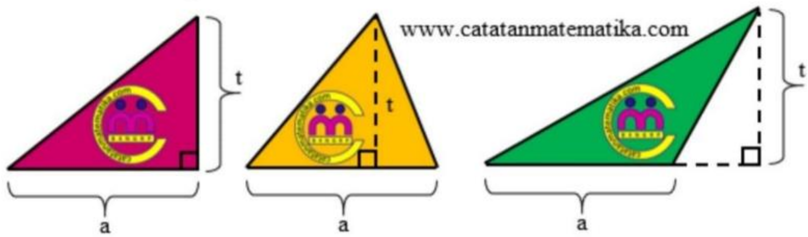


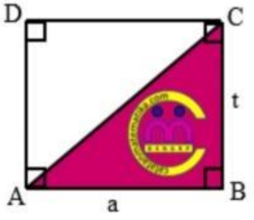
Segitiga memiliki sisi A, sisi B, dan sisi C. Keliling segitiga adalah jumlah semua sisi segitiga.

Rumus luas segitiga, yaitu:

Luas = ½ x a x t

Pembuktian Rumus:





Luas persegi panjang dapat dihitung dengan rumus L = panjang x lebar, Sehingga

L ABCD = L ABCD + L BCD

AD. AB = L ABD + L BCD

Segitiga BCD dan ABCD merupakan dua segitiga yang kongruen, sehingga

L BCD = L ABD.

AD. AB = 2. L ABD

L ABD = 1/2. AD. AB

Pada segitiga ABD, AB dan AD secara berturut-turut merupakan alas dan tinggi segitiga. Dengan demikian, terbukti bahwa

L = 1/2. alas. tinggi = 1/2. a.t

Contoh

Sebuah tanah berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang alas 20 cm dan tinggi 25 cm.

Berapa luas tanah tersebut?

Pembahasan:

Luas = ½ x a x t

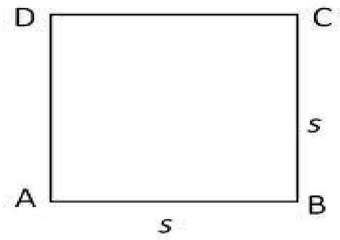
Luas = ½ x 20 x 25

Luas = 250 cm.

5. Segiempat

Segiempat merupakan suatu bidang datar yang dibentuk oleh empat garis lurus.yaitu meliputi jajar genjang, persegi panjang, persegi, belah ketupat, layang-layang, dan trapesium.

a. Persegi



Merupakan bangun datar segi empat yang mempunyai Panjang sisi yang sama. Ciri-ciri persegi:

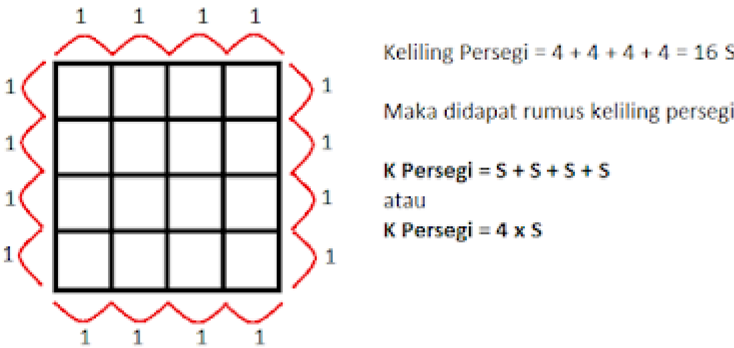
1) Keempat sisinya sama Panjang
2) Mempunyai sudut-sudut yang sama besar yaitu 90◦
3) Kedua diagonalnya berpotongan tegak lurus
4) Mempunyai empat simetri putar
5) Mempunyai empat simetri lipat
6) Mempunyai empat sumbu simetri

Rumus Keliling Persegi:

$$\textbf{Keliling (K)} = \mathbf{4 \times s}$$

Keterangan:
s = panjang sisi persegi

Karena menurut definisi bahwa keliling itu jumlah panjang semua sisi, maka secara mudah dapat menghitungnya dengan menjumlahkan keempat persegi yang ada. Lihat ilustrasi di bawah ini.



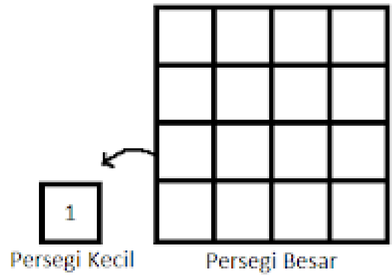
Rumus Luas Persegi:

$$\textbf{Luas (L)} = s \times s$$

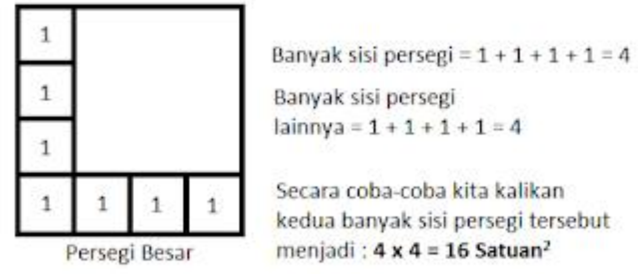
Keterangan:
s = panjang sisi persegi

Agar kita dapat lebih memahami rumus luas persegi, kita harus mengetahui bagaimana **pembuktian rumus luas persegi** ini.

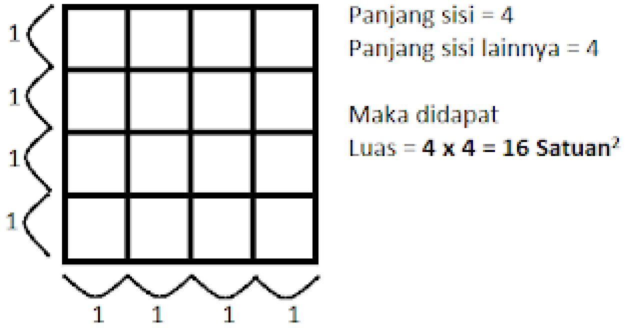
Misalkan terdapat sebuah **persegi besar** yang dibangun oleh **persegi kecil** dengan luas persegi kecil yaitu 1 satuan^2.



Untuk mengetahui luas dari persegi besar, maka yang harus kita lakukan adalah dengan menghitung jumlah persegi kecil yang membangunnya. Dengan cara manual maka akan diketahui bahwa luas dari persegi besar adalah 16 satuan^2 karena ada 16 buah persegi kecil yang semuanya memiliki luas 1 satuan^2. Jika secara coba-coba kita kalikan banyak sisi persegi dengan banyak isis persegi lainnya yang tegak lurus, maka didapatkan luas yang sama yaitu 16 satuan^2 dengan ilustrasi seperti pada gambar berikut.



Atau dengan kita kalikan panjang sisi persegi dengan panjang sisi persegi lainnya.



Dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa las dari persegi tersebut adalah panjang sisi persegi dikali panjang sisi persegi lainnya. Atau kita singkat menjadi L (Luas) Persegi = s x s.

Contoh

Sebuah lantai kamar berukuran 4 m x 5 m akan dipasang keramik. Jika ukuran keramik 40 cm x 40 cm. Berapa banyak keramik yang diperlukan untuk menutup lantai kamar tersebut....

Pembahasan :

Langkah 1: tentukan luas dari kamar tersebut

L = s x s = 4 x 5 = 20 m^2

Langkah 2: hitunglah luas keramik dan samakan satuannya dengan luas kamar

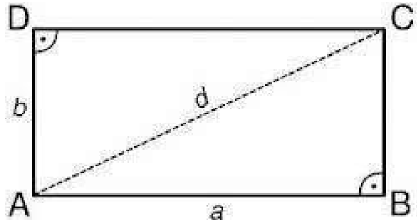
L = 40 x 40 = 1600 cm^2 = 0,16 m^2

Langkah 3: membagi luas kamar dengan luas keramik untuk mendapatkan jumlah keramik yang dibutuhkan

Banyak keramik = 20: 0,16 = 125 buah

Jadi banyak keramik yang dibutuhkan adalah sebanyak 125 buah

b. Persegi Panjang



Persegi Panjang merupakan bangun datar segiempat yang mempunyai dua pasang sisi yang sama Panjang dan sudutnya siku-siku.

Sifat-sifat dari persegi panjang:

1) Sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.
2) Keempat sudutnya sama besar dan merupakan sudut siku-siku (900).
3) Kedua diagonalnya sama panjang dan berpotongan membagi dua sama besar.
4) Dapat menempati bingkainya kembali dengan empat cara.
5)

Rumus Luas Persegi Panjang:

$$\mathbf{L = p \times l}$$

Contoh

Jendela kamar Sindy berbentuk persegi panjang dengan panjang 20 cm. Apabila lebar jendela tiga kali panjang jendela,maka luas jendela Sindy yaitu…

Pembahasan:

Keterangan:

P = 20cm L = 20 x 3 = 60

Penyelesaian: Luas = p x l

L= 20 x 60

L= 1.200 cm2

Jadi, luas persegi panjang tersebut adalah 1.200 cm2

c. Jajar Genjang

Merupakan bangun datar segi empat yang mempunyai sisi-sisi berhadapan sejajar dan sama Panjang, serta sudut-sudut yang berhadapan sama besar.

Ciri-ciri jajar genjang:

1) Sisi-sisi yang berhadapan sama Panjang
2) Sudut yang berhadapan sama besar
3) Kedua diagonalnya saling membagi dua sama Panjang
4) Mempunyai satu simetri putar
5) Tidak mempunyai simetri lipat

Rumus Keliling Jajar Genjang:

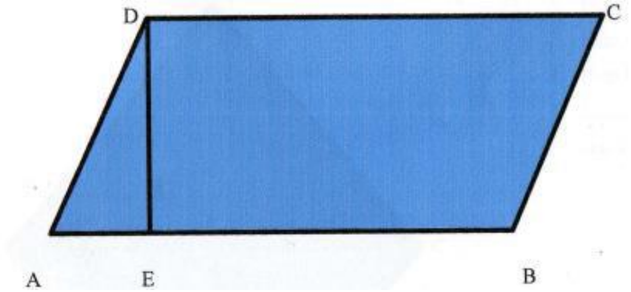
$$K = 2 \times (a + b)$$

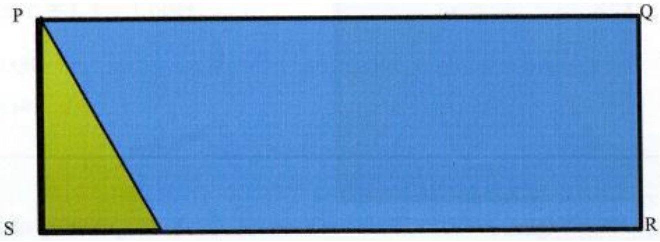
Rumus Luas Jajar Genjang:

$$L = a \times t$$

Keterangan :
a = alas trapesium
t = tinggi trapesium

Penurunan luas daerah jajar genjang dengan pendekatan luas daerah persegi panjang dengan menggunakan jajar genjang yang dipotong pada salah satu bagian miring menurut tinggi (DE). Kemudian letakkan potongan tersebut pada sisi satunya sehingga membentuk persegi panjang.





L ABCD = L PQRS

= PQ x PR

= AB x DE

Karena PQ = AB, QR = DE

Maka, L ABCD = AB x DE atau L ABCD = Alas x Tinggi

Contoh

Ayah akan mengecat dinding yang berbentuk jajar genjang dengan ukutan sisi alas 6 m dan tinggi 4 m. Jika setiap 1 m^2 dibutuhkan cat sebanyak 1/4 liter, maka berapa liter cat yang diperlukan Ayah untuk mengecat dinding tersebut?

Pembahasan: Luas dinding = a × t

Luas dinding = 6 × 4

Luas dinding = 24 m^2

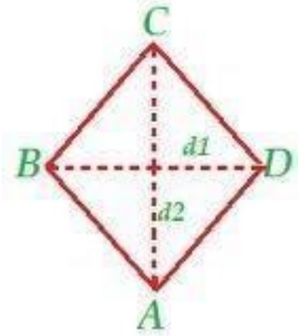
Jumlah cat = luas × cat/m^2

Jumlah cat = 24 × 1/4

Jumlah cat = 24/4

Jumlah cat = 6 liter

d. Belah ketupat



Belah ketupat merupakan bangun segi empat seperti jajar genjang yang semua sisinya sama Panjang.

Ciri-ciri belah ketupat:

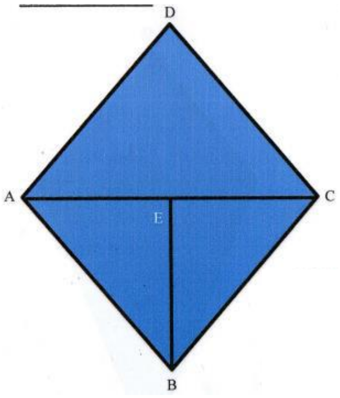
1) Keempat sisinya sama Panjang
2) Sudut yang berhadapan sama besar
3) Kedua diagonalnya berpotongan tegak lurus
4) Mempunyai dua diagonal yang tidak sama panjangnya
5) Mempunyai dua simetri putar
6) Mempunyai dua simetri putar

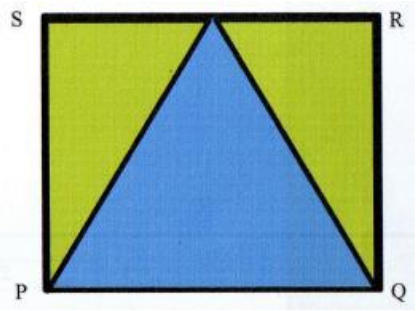
Rumus Luas Belah Ketupat:

$$\mathbf{L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2}$$

Keterangan:
d_1 = Panjang diagonal 1
d_2 = Panjang diagonal 2

Dengan pendekatan luas daerah belah ketupat dan persegi panjang dengan cara membagi menjadi dua bagian belah ketupat yaitu atas dan bawah menurut diagonal AC. Bagi Bagian bawah menjadi 2 segitiga yang kongruen, kemudian letakkan masing-masing segitiga tadi pada masing-masing sisi dari potongan bagian atas sehingga terbentuk persegi panjang PQRS.





L ABCD = L PQRS

= PQ x QR

= AC x DE

DE $= \frac{BD}{2}$

AC dan BD adalah diagonal

PQ = AC, QR = DE

L = $\frac{Diagonal\ 1\ x\ Diagonal\ 2}{2}$

Contoh

Sebuah kolam berbentuk belah ketupat memiliki ukuran diagonal masing-masing 6 m dan 7 m. Di tengah taman tersebut terdapat sebuah taman berbentuk persegi dengan ukuran sisi 3 m, maka luas permukaan air kolam tersebut?

Pembahasan:

Luas kolam = ½ × diagonal 1 × diagonal 2

L = ½ × 6 × 7

L = ½ × 42

L = 21 m^2

Luas taman = sisi × sisi

L = 3 × 3
L = 9 m^2
Luas permukaan air kolam = Luas kolam – Luas taman
Luas permukaan air kolam = 21 – 9
Luas permukaan air kolam = 12 m^2

e. Trapesium

Trapesium merupakan bangun segiempat yang terdiri dari sepasang garis sejajar. Macam-macam trapesium:

1) Trapesium siku-siku Yaitu, Trapezium yang salah satu sisinya tegak lurus terhadap sepasang sisi.
2) Trapesium sama kaki Yaitu trapezium yang sisi-sisi tidak sejajarnya sama Panjang.
3) Trapesium sembarang, yaitu trapezium yang sisi-sisi tidak sejajarnya tidak sama Panjang

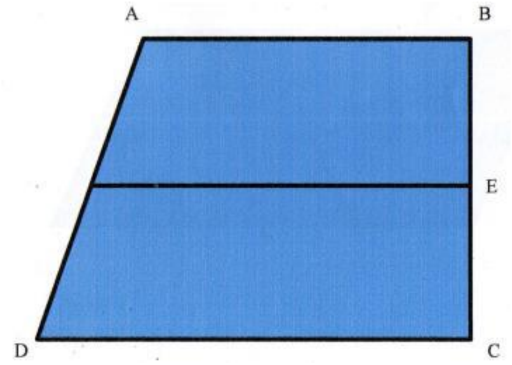
Rumus luas trapesium:

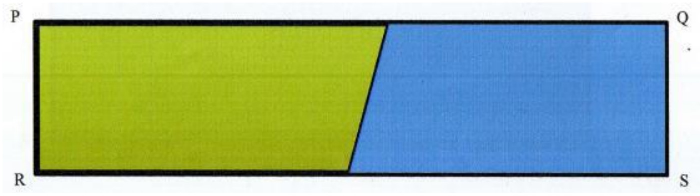
Luas = 12 × jumlah Panjang sisi sejajar × tinggi

Penurunan luas daerah trapesium dengan

pendekatan luas daerah persegi panjang dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut ini :

1) Buat trapesium siku-siku, lalu potong dua bagian yaitu atas dan bawah berdasarkan tinggi trapesium sama panjang BE = CE
2) Letakkan potongan bagian atas di samping potongan bagian bawah sehingga membentuk persegi panjang.





L ABCD = L PQRS

= RS x QS

= (RT + ST) x BE

= (AB + CD) x $\frac{BC}{2}$

AB dan CD merupakan sisi sejajar

BC merupakan tinggi trapesium, sehingga

didapat rumus untuk luas trapesium yaitu:

$$L\ trapesium = \frac{\text{Jumlah Sisi Sejajar}}{2}$$

Contoh

Sebuah pekarangan berbentuk trapesium siku-siku dengan ukuran dua sisi yang sejajar panjangnya 8 m dan 12 m serta tinggi 10 m. Jika harga tanah per m^2 adalah Rp 100.000, berapa harga seluruh tanah tersebut?

Pembahasan:

Langkah 1: menghitung luas tanah

L = 1/2 x (a + b) x t

L = 1/2 x (8 + 12) x 10

L = 1/2 x 20 x 10

L = 1/2 x 200

L = 100 m^2

Langkah 2: menghitung harga tanah

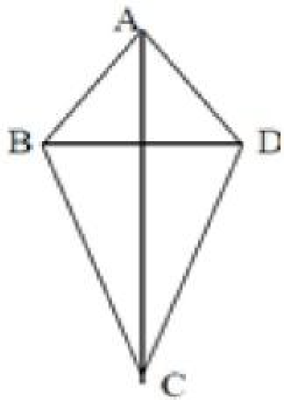
Harga tanah = Laus tanah x harga per m^2

Harga tanah = 100 x Rp 100.000

Harga tanah = Rp 10.000.000

f. Layang – Layang

Dikutip dari (Maros & Juniar, 2016) Layang-layang adalah segi empat yang mempunyai dua pasang sisi sama panjang dan diagonalnya berpotongan saling tegak lurus.



Sifat-sifat layang-layang antara lain:

1) Pada layang-layang ABCD, memiliki sepasang sisi yang berdekatan sama panjang. (AB = AD dan BC = CD)
2) Pada layang-layang ABCD, memiliki sepasang sudut berhadapan sama besar. (B=D)
3) Pada layang-layang ABCD, diagonal-diagonalnya saling berpotongan tegak lurus. (AC dan BD)
4) Pada layang-layang ABCD, memiliki satu simetri lipat

Rumus Luas Layang-Layang :

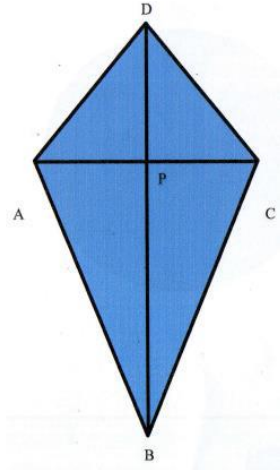
L = 12x AC x BD atau L = 12x d1 x d2

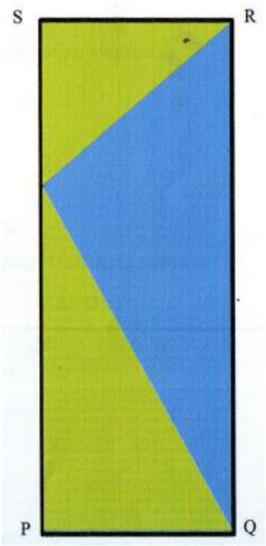
Penurunan luas daerah layang-layang dengan pendekatan luas daerah persegi panjang dapat dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

1) Buatlah layang-layang dengan diagonal

AC dan BD

2) Potong menjadi 2 bagian berdasarkan diagonal BD sehingga menjadi 2 buah segitiga kongruen
3) Potong salah satu segitiga tadi menjadi 2 bagian lagi berdasarkan garis tinggi itu
4) Letakkan hasil potongan pada no. 3 pada no. 2 sehingga berbentuk persegi panjang PQRS





Penurunan rumus:

L ABCD = L PQRS

= PQ x PS

= AE x BD

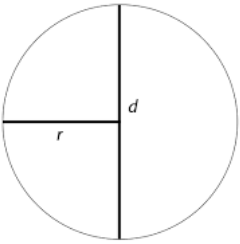
AE $= \frac{AC}{2}$

L ABCD = $\frac{AC}{2}$ x BD

L $= \frac{\text{Diagonal 1 x Diagonal 2}}{2}$

g. Lingkaran

Lingkaran adalah kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu dalam bidang yang sama.



Sifat-sifat dari lingkaran antara lain :

1) Memiliki jumlah sudut 3860 derajat.
2) Memiliki diameter yang membagi lingkaran menjadi 2 sisi seimbang dan dilambangkan dengan $\boldsymbol{d}$.
3) Memiliki jari-jari yang menghubungkan titik pusat dengan titik busur lingkaran, dilambangkan dengan $\boldsymbol{r}$.
4) Memiliki simetri lipat dan putar yang jumlahnya tak terhingga.

Rumus keliling lingkaran

$$\textbf{K lingkaran} = \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{d} = \mathbf{2} \times \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{r}$$

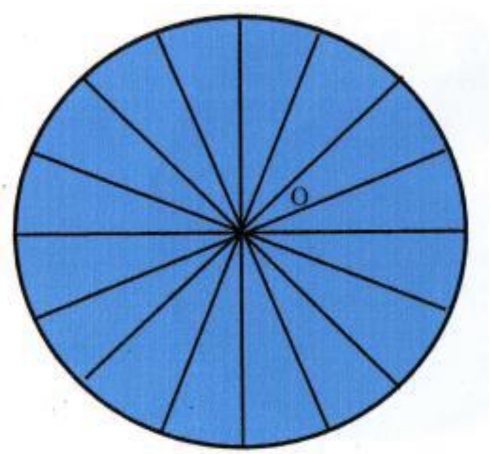
Rumus luas daerah lingkaran

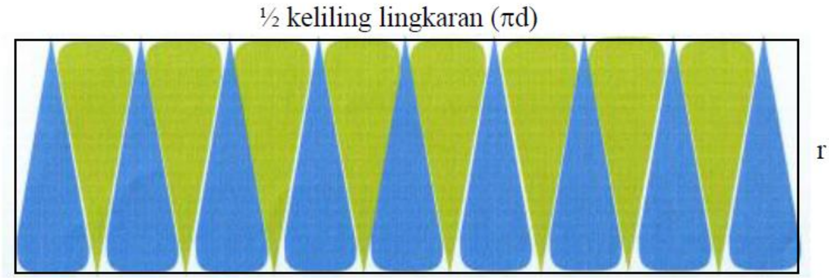
$$\textbf{L lingkaran} = \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{d}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$$

Sebagai pembuktian darimana rumus luas daerah lingkaran, dapat dilakukan dengan pendekatan luas daerah persegi panjang. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

5) Buat lingkaran dengan jari-jari OA
6) Bagi lingkaran menjadi 16 juring yang sama besar

7) Potong juring-juring tersebut
8) Ambil salah satu juring dan potong menjadi 2 bagian yang sama
9) Letakkan dan susun juring-juring tersebut hingga membentuk persegi panjang
10) Kedua potongan no. 4 diletakkan pada masing-masing sisi
11)



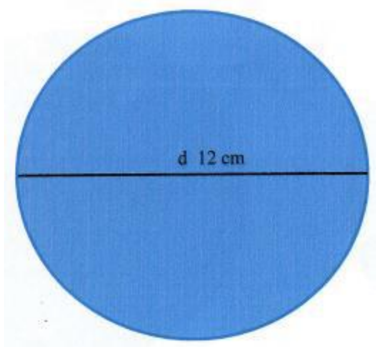


L = PQ x QR
   = PQ x QR

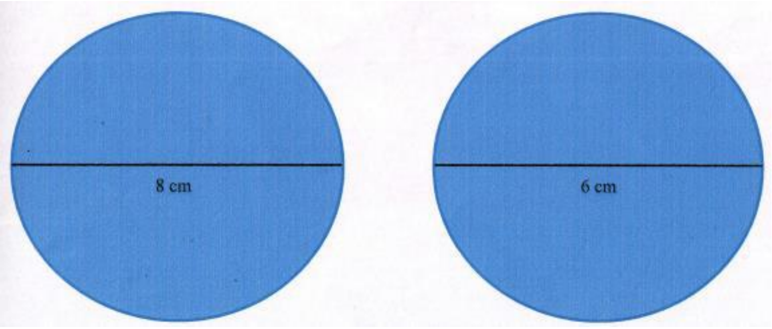
OA = Jari-jari
PQ = Panjang ½ keliling lingkaran
L = ½ x N x d x r
  = ½ keliling x r
  = π r . r
  = πr^2

Kenapa nilai $\boldsymbol{\pi}$ adalah 22/7 atau 3, 14?

Misal, terdapat **lingkaran 1**.



d = 12 cm
K = 37,68 cm
$\frac{K}{d} = \frac{37,68}{12}$
  = 3, 14 cm



Lingkaran 2
d = 8 cm
K = 25,18 cm
$\frac{K}{d} = \frac{25,18}{8}$
= 3, 14 cm

Lingkaran 3
d = 6 cm
K = 18,84 cm
$\frac{K}{d} = \frac{18,84}{8}$
= 3, 14 cm

Maka , $\frac{K}{d} = 3{,}14$. Dan disepakati/diberi nama $\boldsymbol{\pi}$ **(baca pi).**

D. Bangun Ruang

Bangun ruang adalah bangun matematika yang memiliki isi atau volume. Bisa juga disebut bagian ruang yang dibatasi oleh himpunan titik-titik yang terdapat pada seluruh permukaan bangun tersebut.

Pada setiap bangun ruang tersebut mempunyai rumusan dalam menghitung luas maupun isi atau volumenya. Macam-macam bangun ruang ialah prisma, balok, kubus, limas, tabung, kerucut dan bola. Namun yang akan kita bahas dalam makalah ini hanyalah prisma, balok, kubus.

Macam-macam Bangun Ruang

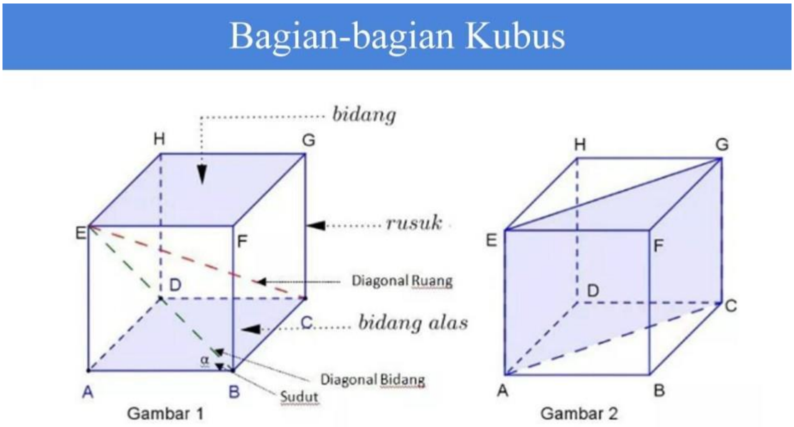
Berikut ini akan kami berikan macam-macam dari bangun ruang, mulai dari bangun ruang sisi datar yang meliputi kubus, balok, prisma, dan limas. Hingga bangun ruang sisi lengkung yang meliputi kerucut, tabung, dan bola.

1. Kubus

Kubus merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh enam sisi serupa yang berwujud bujur sangkar. Kubus juga dikenal dengan nama lain yaitu bidang enam beraturan. Kubus sebetulnya adalah bentuk khusus dari prisma segiempat, sebab tingginya sama dengan sisi alas.

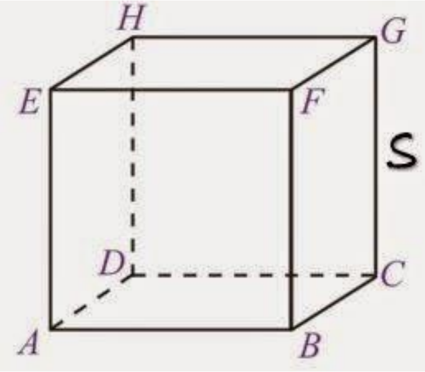
Sifat bangun Kubus

a. Memiliki 6 sisi berbentuk persegi yang memiliki ukuran sama luas
b. Memiliki 12 rusuk yang memiliki ukuran sama panjang
c. Memiliki 8 titik sudut
d. Memiliki 4 buah diagonal ruang
e. Memiliki 12 buah bidang diagonal

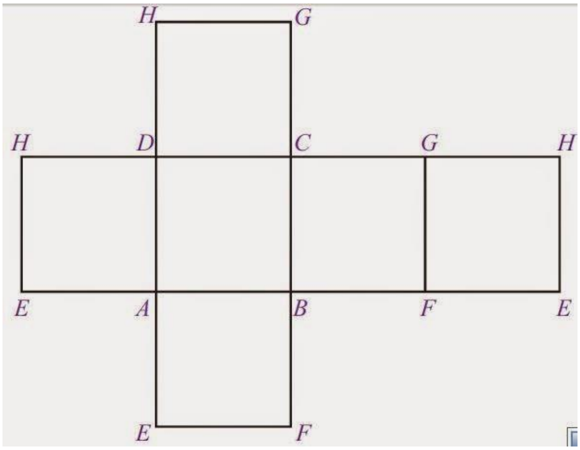


Rumus Pada Kubus
Volume: V= s x s x s = s^3
Luas permukaan: 6 s x s = 6 s^2
Panjang diagonal bidang: $s\sqrt{2}$
Panjang diagonal ruang: $s\sqrt{3}$
Luas bidang diagonal: $s^2\sqrt{2}$
Keterangan:
L= Luas permukaan kubus (cm^2)
V= Volume kubus (cm^3)
S= Panjang rusuk kubus (cm)

Darimana datangnya rumus luas permukaan kubus? Perhatikan gambar di bawah ini!



Pada gambar diatas terdapat kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk "s". Seperti diketahui, pada kubus terdapat 6 buah sisi/bidang yang semuanya berbentuk persegi. Bidang yang dimaksud seperti yang ada pada gambar di atas adalah bidang ABCD (bawah), BCGF (kanan), ADHE (kiri), ABFE (depan), DCGH (belakang), dan EFGH (atas). Dapat dilihat dengan jelas pada jaring-jaring kubus berikut :



Kemudian, kita dapat mengetahui bahwa luas permukaan kubus (L.ABCD.EFGH) adalah jumlah luas seluruh bidang pada kubus. Dapat di uraikan sebagai berikut :

L. ABCD.EFGH = L.ABCD + L.BCGF + L.ADHE + L.ABFE + L.DCGH + L.EFGH

L. ABCD.EFGH = (s x s) + (s x s) + (s x s) + (s x s) + (s x s) + (s x s)

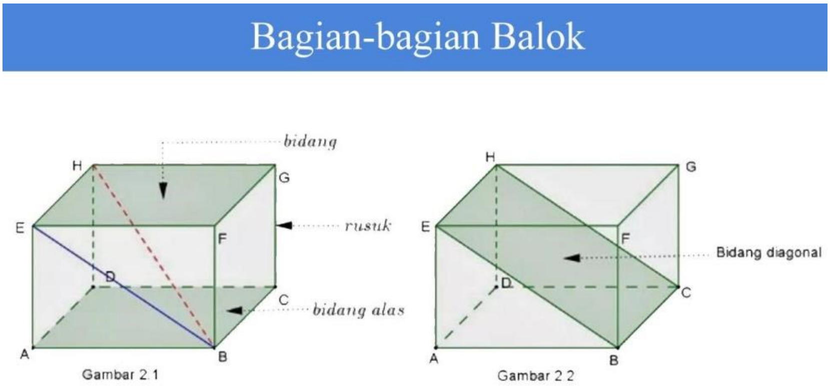
L. ABCD.EFGH = 6 (s x s) = 6 s^2

2. Balok

Balok adalah suatu bangun ruang yang mempunyai tiga pasang sisi segi empat. Di mana pada masing-masing sisinya yang berhadapan mempunyai bentuk serta ukuran yang sama. Berbeda halnya dengan kubus di mana seluruh sisinya kongruen berbentuk persegi, dan pada balok hanya sisi yang berhadapan yang sama besar. Serta tidak seluruhnya berbentuk persegi, kebanyakan berbentuk persegi panjang.

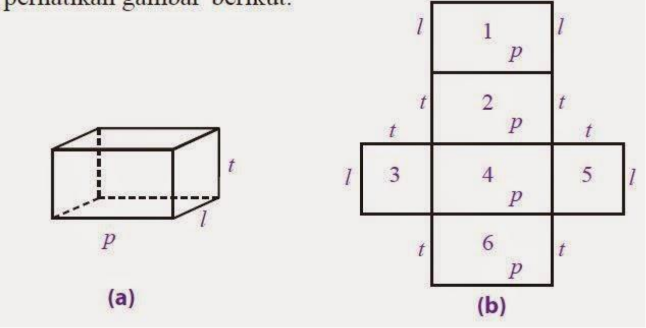
Sifat Balok

a. Sedikitnya sebuah balok mempunyai dua pasang sisi yang berbentuk persegi panjang.
b. Rusuk-rusuk yang sejajar memiliki ukuran yang sama panjang: AB = CD = EF = GH, dan AE = BF = CG = DH.
c. Pada masing-masing diagonal bidang pada sisi yang berhadapan berukuran sama panjang, yakni: ABCD dengan EFGH, ABFE dengan DCGH, dan BCFG dengan ADHE yang mempunyai ukuran sama panjang.
d. Masing-masing diagonal ruang pada balok mempunyai ukuran sama panjang.
e. Masing-masing bidang diagonalnya berbentuk persegi panjang.



Rumus pada Balok:
Volume: p.l.t
Luas Permukaan: 2 (pl + pt + lt)
Panjang Diagonal Bidang: $\sqrt{(p^2+l^2)}$ atau juga bisa $\sqrt{(p^2+t^2)}$ atau $\sqrt{(l^2+t^2)}$
Panjang Diagonal Ruang: $\sqrt{(p^2+l^2+t^2)}$
Keterangan:
p: Panjang
l: lebar
t: tinggi

Untuk mengetahui pembuktian rumus dari luas permukaan balok,
perhatikan gambar berikut.



Misalkan, rusuk-rusuk pada balok diberi nama p (panjang), l (lebar), dan t (tinggi) seperti pada gambar di atas. Dengan demikian, luas permukaan balok tersebut adalah:
Luas permukaan balok
= luas persegi panjang 1 + luas persegi panjang 2 + luas persegi panjang 3 + luas persegi panjang 4 + luas persegi panjang 5 + luas persegi panjang 6

$= (p \times l) + (p \times t) + (l \times t) + (p \times l) + (l \times t) + (p \times t)$

$= (p \times l) + (p \times l) + (l \times t) + (l \times t) + (p \times t) + (p \times t)$

$= 2\ (p \times l) + 2(l \times t) + 2(p \times t)$

$= 2\ ((p \times l) + (l \times t) + (p \times t)$

$= 2\ (pl + lt + pt)$

Jadi, luas permukaan balok dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

Luas permukaan balok = 2(pl + lt + pt)

3. Limas

Limas merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh alas berbentuk segi-n (dapat berupa segi tiga, segi empat, segi lima, dll) serta bidang sisi tegak berbentuk segitiga yang berpotongan di satu titik puncak. Terdapat banyak jenis limas yang dikategorikan dengan dilandasi bentuk alasnya. Antara lain: limas segitiga, limas segi empat, limas segi lima, dan yang lainnya. Limas dengan mempunyai alas berbentuk lingkaran disebut sebagai kerucut. Sementara untuk limas dengan alas yang berupa persegi disebut sebagai piramida.

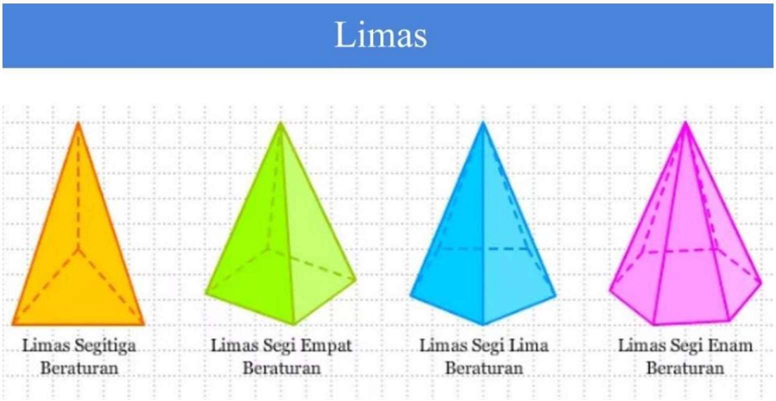
Sifat limas:

Bangun limas juga memiliki beberapa sifat atau ciri, diantaranya ialah sebagai berikut:

a. Memiliki 5 sisi yakni: 1 sisi berbentuk segiempat yang berupa alas serta 4 sisi lainnya seluruhnya berbentuk segitiga dan merupakan sisi tegak.

b. Memiliki 8 buah rusuk.

c. Memiliki 5 titik sudut, antara lain: 4 sudut terletak di bagian alas serta 1 sudut terletak di bagian atas yang merupakan titik puncak.

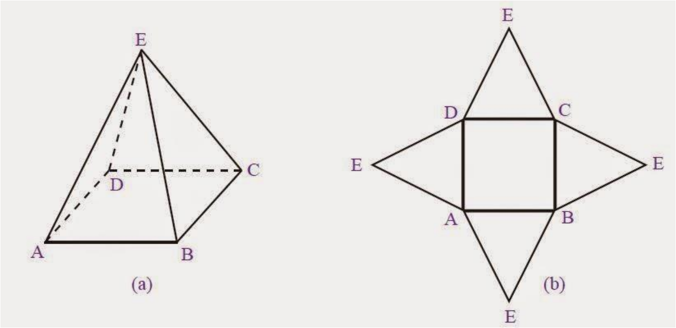


Rumus Pada Limas

Volume Limas = 1/3 Luas Alas x Tinggi

Luas Permukaan = Jumlah Luas Alas + Jumlah Luas sisi tegak

Luas permukaan limas pun dapat diperoleh dengan cara menentukan jaring-jaring limas tersebut. Kemudian, menjumlahkan luas bangun datar dari jaring-jaring yang terbentuk. Untuk lebih jelasnya, coba pelajari gambar dan uraian berikut ini!



Gambar di atas memperlihatkan sebuah limas segiempat E.ABCD beserta jaring-jaringnya. Dengan demikian, luas permukaan limas tersebut adalah sebagai berikut.

Luas permukaan limas E. ABCD = luas ABCD + luas ΔABE + luas ΔBCE + luas ΔCDE + luas ΔADE = luas ABCD + (luas ΔABE + luas ΔBCE + luas ΔCDE + luas ΔADE)

Secara umum, luas permukaan limas adalah sebagai berikut.

Luas permukaan limas = luas alas + jumlah luas sisi-sisi tegak

4. Prisma

Prisma merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi di mana alas dan juga tutupnya kongruen serta sejajar berbentuk segi-n. Sisi-sisi tegak dalam prisma memiliki beberapa bentuk, antara lain: persegi, persegi panjang, atau jajargenjang. Dilihat dari **tegak rusuknya**, prisma terbagi menjadi dua macam, yaitu: prisma tegak dan prisma miring. **Prisma**

tegak merupakan prima di mana rusuk-rusuknya tegak lurus dengan alas dan juga tutupnya. Sementara untuk **prisma miring** merupakan prisma di mana rusuk-rusuk tegaknya tidak tegak lurus pada alas dan juga tutupnya.

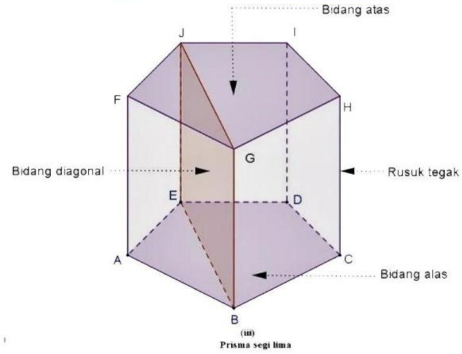
Apabila kita lihat dari **bentuk alasnya**, prisma terbagi lagi menjadi beberapa macam, yaitu: prisma segitiga, prisma segi empat, prisma segi lima, dan lain sebagainya. Prisma yang alas dan juga tutupnya berbentuk persegi disebut sebagai balok dan kubus. Sementara untuk prisma yang memiliki alas dan tutupnya berbentuk lingkaran disebut sebagai tabung.

Sifat Prisma

Bangun limas juga mempunyai beberapa sifat atau ciri, diantaranya ialah sebagai berikut:

a. Memiliki bidang alas dan juga bidang atas yang berupa segitiga kongruen (2 alas tersebut juga merupakan sisi prisma segitiga).
b. Memiliki 5 sisi (2 sisi yang berupa alas atas serta bawah, 3 sisi lainnya adalah sisi tegak yang seluruhnya berbentuk segitiga).
c. Memiliki 9 rusuk.
d. Memiliki 6 titik sudut.

Bagian-bagian Prisma



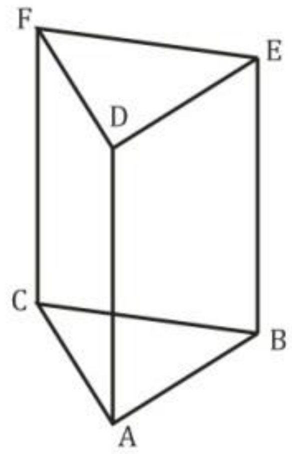
Rumus Pada Prisma :

Rumus menghitung luas permukaan :

Luas suatu permukaan bangun ruang itu sama dengan jumlah semua luas sisi-sisinya. Misalnya luas permukaan kubus itu sama dengan 6 kali luas sisinya, yaitu sama dengan $6s^2$.

Kali ini yang akan dibahas di sini adalah luas permukaan prisma, yaitu prisma secara umum, baik alasnya beraturan maupun tidak.

Balok juga termasuk prisma kan! Jadi, rumus berikut ini juga pasti bisa digunakan untuk balok.



Untuk mencari luas permukaan prisma, yaitu harus kita cari semua luas sisi-sisi pada bangun ruang itu. Luas permukaan prisma sama dengan

L.ABC + L.DEF + L.ABED + L.BCFE + L.ACFD

Tentunya, luas tutup prisma sama dengan luas alas prisma.

Sedangkan luas samping/selimutnya, yaitu luas sisi alas dikalikan dengan tingginya.

L.ABED = AB x BE = AB x t
L.BCFE = BC x CF = BC x t
L.ACFD = AC x CF = AC x t

Sehingga, luas permukaannya adalah

L. Permukaan = L. ABC + L. DEF + L. ABED + L. BCFE + L. ACFD

L. Permukaan = 2 x L. alas + AB x t + BC x t + AC x t

L. Permukaan = 2 x L. alas + (AB + BC + AC) x t

L. Permukaan = 2 x L. alas + (Keliling alas) x t

Secara umum juga bisa didapatkan demikian, yaitu luas permukaan suatu limas itu sama dengan 2 kali luas alasnya, ditambah dengan keliling yang dikalikan dengan tingginya, secara umum, bisa dituliskan :

L permukaan prisma = 2 x L.alas + (Keliling alas) x t

Dengan L adalah luas dan K adalah keliling.

Rumus menghitung keliling:

K = 3s (s + s + s)

Rumus menghitung Volume:

Volume Prisma = Luas segitiga x tinggi

atau juga bisa

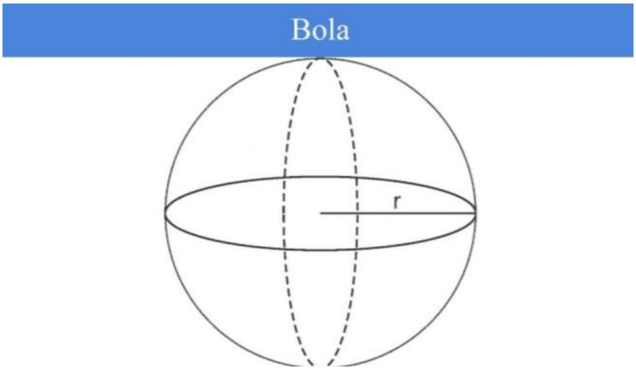
Volume Prisma = 1/2 x a.s x t.s x t

5. Bola

Bola merupakan salah satu bangun ruang sisi lengkung yang dibatasi oleh satu bidang lengkung. Atau juga bisa didefinisikan sebagai sebuah bangun ruang berbentuk setengah lingkaran yang diputar mengelilingi garis tengahnya.

Sifat Bola

a. Bola memiliki 1 sisi serta 1 titik pusat.
b. Bola tidak memiliki rusuk.
c. Bola tidak memiliki titik sudut
d. Tidak memiliki bidang diagonal
e. Tidak memiliki diagonal bidang
f. Sisi bola disebut sebagai dinding bola.
g. Jarak dinding ke titik pusat bola disebut sebagai jari-jari.
h. Jarak dinding ke dinding serta melewati titik pusat disebut sebagai diameter.



Rumus pada Bola

Rumus untuk menghitung volume bola yakni:

$\boldsymbol{4/3 \times \pi \times r^3}$

Rumus untuk menghitung luas bola yakni:

$\boldsymbol{4 \times \pi \times r^2}$

Keterangan

V: Volume bola (cm^3)

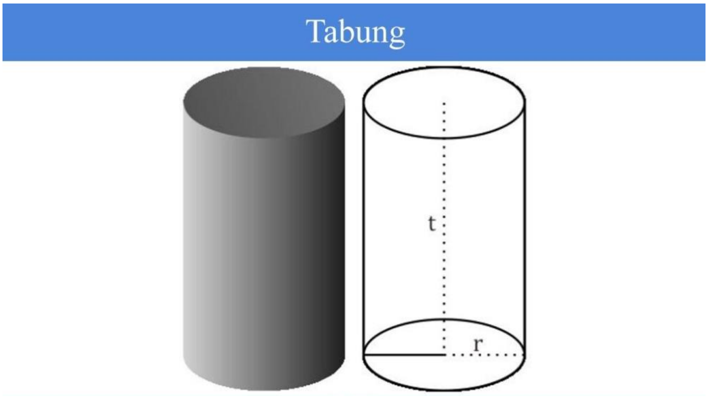
L: Luas permukaan bola (cm^2)
R: Jari – jari bola (cm)
π: 22/7 atau 3,14

6. Tabung

Bangun tabung merupakan suatu bangun ruang tiga dimensi yang mempunyai tutup dan alas yang berbentuk lsebuah ingkaran dengan memiliki ukuran yang sama dan diselimuti oleh persegi panjang.

Sifat Tabung

a. Tabung memiliki 3 buah sisi, 1 persegi panjang, 2 lingkaran.
b. Tidak memiliki rusuk.
c. Tidak memiliki titik sudut.
d. Tidak memiliki bidang diagonal.
e. Tidak memiliki diagonal bidang.
f. tabung memiliki sisi alas serta sisi atas berhadapan yang kongruen.
g. Tinggi tabung merupakan jarak titik pusat bidang lingkaran alas dengan titik pusat lingkaran atas.
h. Bidang tegak tabung berwujud lengkungan yang disebut sebagai selimut tabung.
i. Jaring-jaring tabung berwujud 2 buah lingkaran serta 1 persegi panjang.



Rumus pada Tabung

Rumus untuk menghitung luas alas:

luas lingkaran = π x r^2

Rumus untuk menghitung volume pada tabung:

π x r^2 x t

Rumus untuk menghitung keliling alas pada tabung:

2 x π x r

Rumus untuk menghitung luas pada selimut tabung:

2 x π x r x t

Rumus untuk menghitung luas pada permukaan tabung:

2 x luas alas + luas selimut tabung

Rumus kerucut + tabung:

volume = **$(\pi.r^2.t) + (1/3.\pi.r^2.t)$**

luas = **$(\pi.r^2) + (2.\pi.r.t) + (\pi.r.s)$**

Rumus tabung + 1/2 bola:

Rumus untuk menghitung Volume = **$\pi.r^2.t+2/3.\ \pi.r^3$**

Rumus untuk menghitung Luas =

$(\pi.r^2)$ + $(2.\pi.r.t)$ + $(½.4.n.r^2)$ = $(3.\pi.r^2)$ + $(2. \pi.r.t)$

Rumus tabung+bola:

Rumus untuk menghitung Volume= **$(\pi.r^2.t)$ + $(4/3. \pi.r^3)$**

Rumus untuk menghitung Luas= **$(2. \pi.r^2)$ + $(4. \pi.r^2)$ = $\pi.r^2$**

Keterangan:

V = Volume tabung(cm^3)

π = 22/7 atau 3,14

r = Jari – jari /setengah diameter (cm)

t = Tinggi (cm)

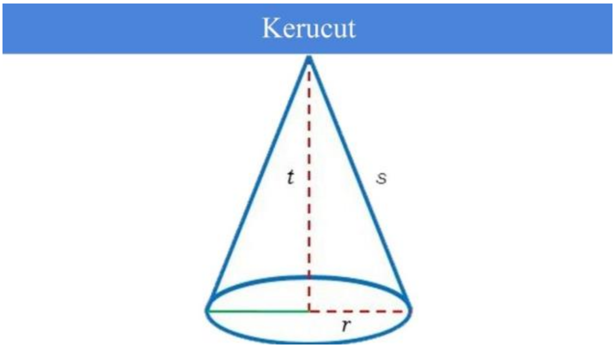
7. Kerucut

Kerucut merupakan salah satu bangun ruang yang memiliki sebuah alas yang berbentuk lingkaran dengan selimut yang mempunyai irisan dari lingkaran.

Sifat Kerucut

Terdapat beberapa sifat pada bangun ruang kerucut, antara lain ialah sebagai berikut:

a. Kerucut memiliki 2 sisi.
   Kerucut tidak memiliki rusuk.
b. Kerucut memiliki 1 titik sudut.
c. Jaring-jaring kerucut terdiri atas lingkaran serta segitiga.
d. Tidak memiliki bidang diagonal
e. Tidak memiliki diagonal bidang



Rumus pada bangun ruang kerucut

Rumus untuk menghitung volume:

$$V = 1/3 \times \pi \times r \times r \times t$$

Rumus untuk menghitung luas:

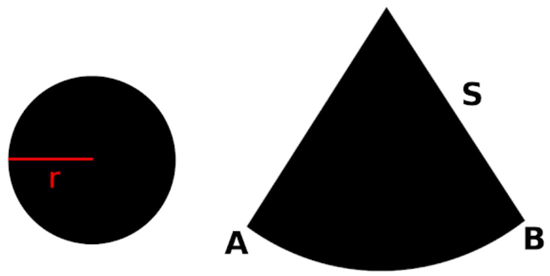
$$L\ permukaan = luas\ alas + luas\ selimut$$
$$= \pi r s + \pi r^2$$

Keterangan:

r = jari – jari (cm)

T = tinggi(cm)

π = 22/7 atau 3,14



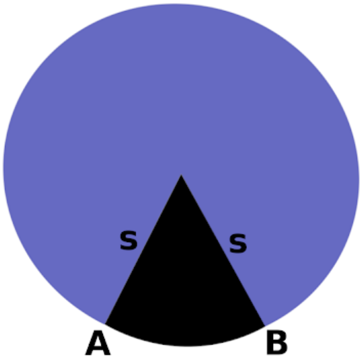
Untuk membuktikan rumus dari luas permukaan kerucut tersebut, jika kita perhatikan, luas permukaan kerucut terdiri dari satu lingkaran utuh dan bagian dari lingkaran (juring), maka kita peroleh

Luas Permukaan Kerucut = Luas Lingkaran + Juring AB

Dan ternyata panjang busur AB = keliling lingkaran dengan jari-jari **r** dikarenakan kedua garis tersebut merupakan rusuk pada bangun kerucut.

Busur AB = Keliling lingkaran utuh = 2 π r

Kalian perhatikan bahwa juring AB memiliki garis pelukis **s** yang merupakan jari-jari sebuah lingkaran penuh. Perhatikan ilustrasi berikut.



Dari ilustrasi, kita bisa mendapatkan luas dari Juring AB dengan membandingkan antara busur AB dan keliling lingkaran penuh yang berjari-jari **s**.

Kita anggap lingkaran penuh dari ilustrasi tersebut adalah lingkaran besar, maka

$$\frac{Luas\ Juring\ AB}{Luas\ Lingkaran\ Besar} = \frac{Busur\ AB}{Keliling\ Lingkaran\ Besar}$$

Luas Juring AB

$$= \frac{Busur\ AB}{Keliling\ Besar} \times Luas\ Lingkaran\ Besar$$

$$= \frac{2\pi r}{2\pi s} \times \pi s^2$$

$$= \pi rs$$

Luas Permukaan Kerucut = Luas Lingkaran + Juring AB

$$= \pi r^2 + \pi rs$$

E. Sistem Koordinat

Kata koordinat dalam matematika dapat diartikan sebagai bilangan yang dipakai untuk menunjukkan lokasi suatu titik dalam garis, permukaan, atau ruang. Secara umum, sistem koordinat memiliki dua jenis, yaitu dua dimensi dan tiga dimensi. Pada sistem koordinat dua dimensi, terdapat dua macam koordinat, koordinat kartesius dan koordinat kutub (polar).

1. Koordinat Kartesius

   Sistem koordinat kartesius adalah koordinat yang mempunyai sepasang sumbu yang saling berpotongan dan tegak lurus.

   Koordinat kartesius mencakup dua jenis sumbu, yakni sumbu x dan sumbu y.

Sumbu x adalah sumbu yang mendatar dan sering disebut dengan absis, sedangkan sumbu yang tegak adalah sumbu y dan disebut ordinat.

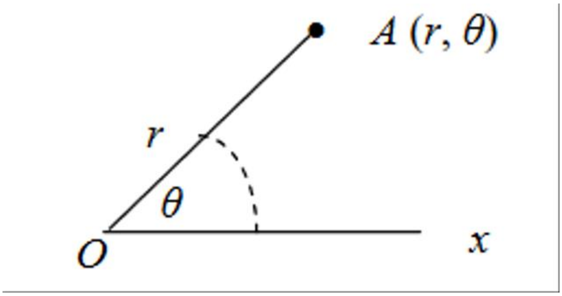
Kedua sumbu berpotongan pada sebuah titik yang disebut titik pangkal. Selain itu, kedua sumbu tersebut dapat membagi bidang datar menjadi 4 bagian atau daerah yang dinamakan kuadran, yaitu:

a. Kuadran I: di atas sumbu x dan di sebelah kanan sumbu y.
b. Kuadran II: di atas sumbu x dan di sebelah kiri sumbu y.
c. Kuadran III: di bawah sumbu x dan di sebelah kiri sumbu y.
d. Kuadran IV: di bawah sumbu x dan di sebelah kanan sumbu y.

2. Koordinat Kutub (Polar)

   Koordinat kutub atau polar, yaitu penentuan sebuah titik ditentukan oleh sebuah jarak dan sebuah sudut. Sistem ini biasanya menunjukkan posisi relatif terhadap titik kutub (*pole)* O dan sumbu polar (*ray*) yang diberikan dan berpangkal pada O.

   Untuk lebih mudah memahami koordinat kutub polar, perhatikan gambar berikut ini:



Koordinat kutub biasanya digunakan untuk masalah-masalah yang rumit diselesaikan oleh sistem koordinat kartesius, seperti pembuatan turbin angin sprial archimedes.

F. Segitiga Siku-Siku dan Teorema Pythagoras

1. Segitiga Siku-Siku

   Segitiga siku-siku menjadi salah satu bentuk segitiga yang memiliki karakteristik tertentu yang sangat berbeda dengan bentuk segitiga lainnya. Segitiga siku-siku merupakan bangun datar yang memiliki sudut siku-siku. Segitiga siku-siku memiliki 2 sisi yang membentuk siku-siku. Kedua sisi segitiga ini membentuk sudut tegak lurus. Segitiga siku-siku juga memiliki sisi miring yang umumnya disebut sebagai hipotenusa. Sisi miring ini terletak di depan sudut yang membentuk 90 derajat atau siku-siku tersebut.
   Rumus Luas Segitiga Siku-siku

   L = ½ x a x t

   Keterangan:
   L = luas
   a = Alas

t = Tinggi

Keliling Segitiga Siku-siku

K = sisi a + sisi b + sisi c

Keterangan:

K = Keliling

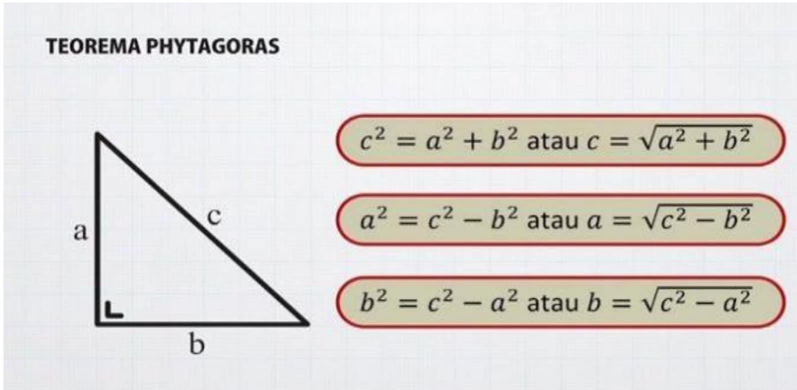
Sisi a = Sisi 1

Sisi b = Sisi 2

Sisi c = Sisi 3

2. Teorema Phytagoras

   Dalam segitiga juga terdapat teorema pythagoras. Teorema Phytagoras berfungsi untuk mengetahui apakah segitiga itu lancip, tumpul, atau siku-siku. Jika jumlah dua sisi kuadrat sama dengan nilai kuadrat sisi ketiga, yang merupakan sisi miring, maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku. Dikutip dari (Hendrajaya, 2020). teorema pythagoras berbunyi: "Di dalam sebuah segitiga siku-siku diberlakukan kuadrat dari sisi miring sama dengan jumlah kuadrat dari sisi-sisi lainnya". Dengan demikian ketiga sisi segitiga siku-siku memiliki hubungan yang saling terikat. Dalam kehidupan sehari-hari teorema Pythagoras akan sangat membantu dalam kegiatan menghitung atau memperkirakan bidang miring suatu bangunan yang memiliki sisi-sisi yang saling tegak lurus, atau memiliki sudut 90 derajat. Berikut ini rumusnya:

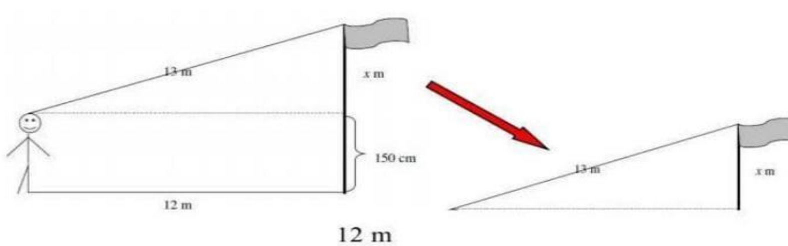


Contoh Soal!

Seorang anak mempunyai tinggi badan 150 cm, ia berdiri 12 cm dari tiang bendera. Jika jarak antara kepala anak tersebut dengan puncak tiang bendera adalah 13 cm, maka hitunglah tinggi tiang bendera tersebut!

Penyelesaian:

Pada contoh soal diatas jika kita gambarkan adalah sebagai berikut.



Gambar 1 **Gambar 2**

Untuk menghitung tinggi tiang bendera, langkah yang pertama harus dihitung dulu nilai x. Nilai x dapat dicari dengan memperhatikan Gambar 2, maka:

X = 132-122

X = 169-144 = 25 = 5 m

Jadi, tinggi tiang bendera dapat diperoleh:

5m + 1,5 m = 6,5 m.

G. Transformasi Geometri

1. Pengertian transformasi Geometri

Transformasi berarti perubahan sebuah struktur menjadi bertambah, berkurang atau tertata kembali unsurnya. Sedangkan geometri berarti cabang matematika yang menjelaskan soal sifat garis, sudut, bidang, dan ruang. Berdasarkan dua definisi tersebut transformasi geometri dapat disimpulkan sebagai perubahan bentuk dari sebuah garis, sudut, ruang, dan bidang. Dalam kehidupan sehari-hari, transformasi geometri ini biasanya dimanfaatkan untuk pembuatan karya-karya seni dan desain arsitektur.

Transformasi telah dikenal sejak lama, dimulai dari zaman babilonia, yunani, para ahli aljabar muslim abad ke-9sampai ke-15 dan dilanjutkan matematikawan eropa abad ke-18 sampai dua dekade pertama abad ke-19. Keberaturan dan pengulangan pola memberi dorongan untuk mempelajari bagaimana dan apa yang tak berubah oleh suatu transformasi. Transformasi geometri adalah suatu fungsi yang mengaitkan antar setiap titik di bidang dengan suatu aturan tertentu. Pengaitan ini dapat dipandang secara aljabar atau geometri. Sebagai ilustrasi, jika titik (x,y) dicerminkan terhadap sumbu x, maka diperoleh titik (x,-y). secara aljabar transformasi ini ditulis T(x,y)=(x,-y).

Transformasi geometri merupakan pemetaan satu-satu dengan menggunakan himpunan titik sebagai masukan dan returning points sebagai luaran/bayangan. Transformasi geometri juga dapat diartikan sebagai perubahan objek-objek geometri (titik, garis, bidang) baik dari segi posisi maupun ukuran. Terdapat empat jenis transformasi geometri yaitu translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi.

2. Translasi (Pergeseran)

Translasi merupakan salah satu jenis transformasi yang bertujuan memindahkan semua titik pada bangun dengan jarak dan arah yang sama.

Translasi atau pergeseran merupakan jenis dari transformasi geometri di mana terjadi perpindahan atau pergeseran dari suatu titik ke arah tertentu di dalam sebuah garis lurus bidang datar. Akibatnya, setiap bidang yang ada di garis lurus tersebut juga akan digeser dengan arah dan jarak tertentu. Translasi pada dasarnya hanya mengubah posisi, bukan bentuk dan ukuran dari bidangnya.

Contoh sederhana dari translasi adalah peristiwa yang terjadi di perosotan. Dimana orang yang sama dengan sebuah bidang berpindah posisi dari titik awal (awal perosotan) dan titik akhir (ujung perosotan). Contoh lainnya adalah kendaraan yang berjalan di jalan lurus, dari kejadian itu bisa dilihat bahwa kendaraan yang merupakan objek tidak mengalami perubahan ukuran tetapi hanya berpindah tempat.

Sifat – sifatnya yaitu:

a. Objek yang digerakkan arahnya sama
b. Ukuran dan bentuk dengan objek asal sama
c. Objek menghadap arah yang sama
d. Pada suatu translasi setiap bangunnya tidak berubah.

Rumus dari translasi itu sendiri adalah:

(x’,y’) = (a,b) + (x,y)

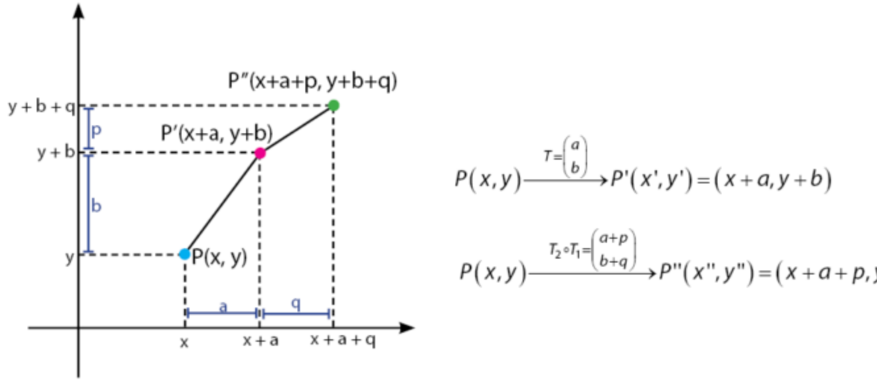
Keterangan:

x’, y’ = titik bayangan

x,y = titik asal

a,b = vektor translasi

Contoh:



Sebuah titik pada awalnya terletak pada titik P(x, y). Setelah mengalami translasi pertama, letak titik P(x, y) menjadi berada di titik P'(x + a, y

+ b). Translasi kedua membuat titik P(x, y) menjadi terletak pada titik P”(x + a + p, y + b + q). Sebagai contoh sederhana, translasi titik P(2, 5) oleh T(1, 4) akan merubah letak titik P menjadi berada pada titik P'(2+1. 5+4) = P'(3, 9).

Contoh soal transformasi geometri jenis translasi

Tentukan titik bayangan jika titik A adalah (2, 4) dan ditranslasikan menjadi (6, 3)

Jawab:

(x’, y’) = (x +a, y+b)

(x’, y’) = (2+6, 4+3)

(x’, y’) = (8, 7)

Maka titik bayangannya ada di (8, 7)

Penggunaan translasi dapat dilihat dalam kehidupan sehari-hari, seperti:

a. Bermain catur

   Saat bermain catur tentu strategi sangat diperlukan untuk memenangkan sebuah pertandingan. Strategi yang dilakukan dengan cara memindahkan atau menggeser bidak di tempat yang tepat, agar mampu menyingkirkan bidak lawan. Perpindahan atau pergeseran seluruh bagian bidak merupakan contoh dari translasi.

b. Bermain mobil-mobilan

   Seorang anak kecil bermain mobil-mobilan, maka seluruh bagian mobil akan bergerak sesuai dengan arah dorongan atau tarikan yang dilakukan anak. Perpindahan atau pergeseran seluruh bagian mobil merupakan contoh dari translasi.

c. Bermain perosotan

Di sekolah taman kanak-kanak selalu ada permainan perosotan dan ini merupakan salah satu permainan favorit dan sangat digemari anak-anak. Permainan ini dimulai dari posisi tubuh di titik tertinggi dan meluncurkan diri ke titik terendah. Perpindahan atau pergeseran seluruh tubuh anak dari titik tertinggi ke titik terendah merupakan translasi.

3. Refleksi (Pencerminan)

Refleksi adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang hendak dipindahkan itu. Refleksi suatu bangun geometri adalah proses mencerminkan setiap titik bangun geometri itu terhadap garis tertentu. Garis tertentu itu dinamakan sebagai sumbu cermin atau sumbu simetri. Jika suatu bangun geometri dicerminkan terhadap garis tertentu, maka bangun bayangan kongruen dengan bangun semula.

Sifat – sifatnya yaitu:

a. Ciri khas suatu matriks Refleksi adalah determinannya = -1
b. Dua refleksi berturut-turut terhadap sebuah garis merupakan suatu identitas, artinya yang direfleksikan tidak berpindah.

c. Pengerjaan dua refleksi terhadap dua sumbu yang sejajar, menghasilkan translasi (pergeseran) dengan sifat:
   1) Jarak bangun asli dengan bangun hasil sama dengan dua kali jarak kedua sumbu pencerminan.
   2) Arah translasi tegak lurus pada kedua sumbu sejajar, dari sumbu pertama ke sumbu kedua. Refleksi terhadap dua sumbu sejajar bersifat tidak komutatif.
d. Pengerjaaan dua refleksi terhadap dua sumbu yang saling tegak lurus, menghasilkan rotasi (pemutaran) setengah lingkaran terhadap titik potong dari kedua sumbu pencerminan. Refleksi terhadap dua sumbu yang saling tegak lures bersifat komutatif.
e. Pengerjaan dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu yang berpotongan akan menghasilkan rotasi (perputaran) yang bersifat:
   1) Titik potong kedua sumbu pencerminan merupakan pusat perputaran.
   2) Besar sudut perputaran sama dengan dua kali sudut antara kedua sumbu pencerminan.
   3) Arah perputaran sama dengan arah dari sumbu pertama ke sumbu kedua.

Rumus umum dari refleksi antara lain:

- Refleksi terhadap sumbu -x: (x,y) maka (x, -y)

- Refleksi terhadap sumbu -y: (x,y) maka (-x, y)
- Refleksi terhadap garis y = x: (x, y) maka (y, x)
- Refleksi terhadap garis y = -x: (x, y) maka (-y, -x)
- Refleksi terhadap garis x = h: (x, y) maka (2h, -x, y)
- Refleksi terhadap garis y = K: (x. y) maka (x, 2k – y)

Contoh soal transformasi geometri jenis refleksi

Titik E(-2, 6) jika dicerminkan terhadap garis y = -x memiliki bayangan di titik ....

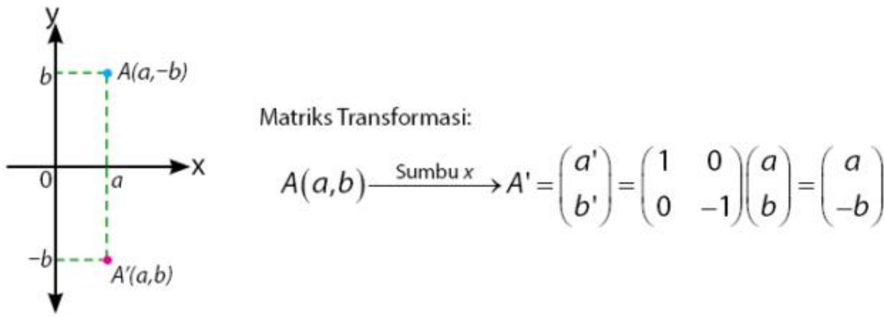
Jawab

E'(-y, -x) = E'(-6, -(-2)) = E'(-6, 2)

Berikut ini adalah ringkasan daftar matriks transformasi geometri hasil dari refleksi/pencerminan suatu obyek,

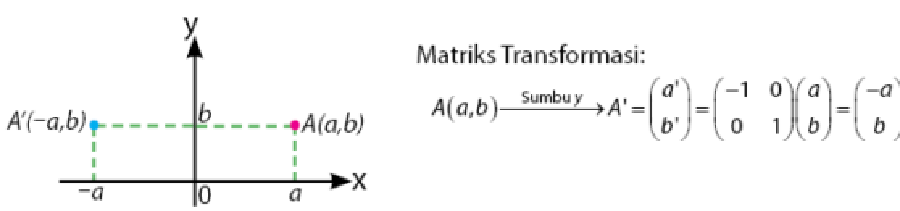
1. Pencerminan terhadap sumbu x

Pada pencerminan terhadap sumbu x, nilai absis tetap dan ordinat menjadi kebalikannya. Letak titik A(a, b) menjadi berada pada titik A'(a, -b) karena pencerminan terhadap sumbu x.



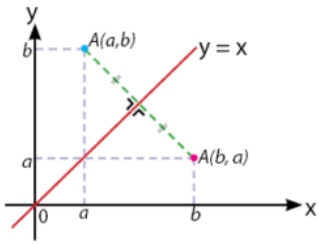
2. Pencerminan Terhadap Sumbu y

Pencerminan terhadap sumbu y, merupakan kebalikan dari pencerminan terhadap sumbu x. Di mana nilai absis menjadi kebalikannya dan nilai ordinatnya tetap. Letak titik A(a, b) menjadi b erada pada titik A'(-a, b) karena pencerminan terhadap sumbu y.



3. Pencerminan terhadap Garis y = x

Pada pencerminan terhadap garis y = x akan mengakibatkan nilai absis menjadi ordinat dan nilai ordinat akan menjadi absis. Letak titik A(a, b) menjadi berada pada titik A'(b, a) karena pencerminan terhadap sumbu y = x.

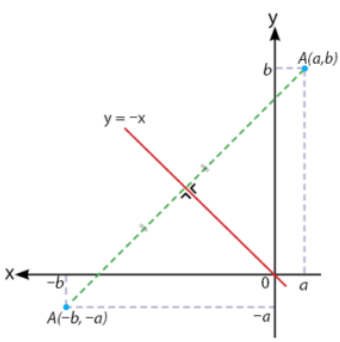


Matriks Transformasi:

$$A(a,b) \xrightarrow{\text{garis } y=x} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

4. Pencerminan terhadap Garis y = -x

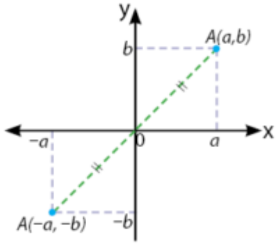
Pencerminan terhadap garis y = -x akan membuat nilai absis menjadi kebalikan dari ordinat, sedangkan nilai ordinat akan menjadi kebalikan dari absis. Letak titik A(a, b) menjadi berada pada titik A'(-b, -a) karena pencerminan terhadap sumbu y = -x.



$$A(a,b) \xrightarrow{\text{garis } y=-x} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}$$

5. Pencerminan terhadap Titik Asal O(0,0)

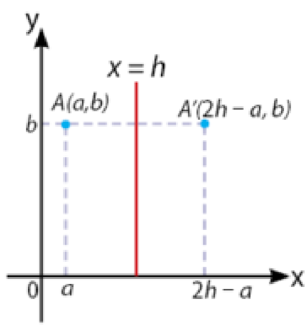
Pencerminan pada titik asal artinya melakukan pencerminan terhadap titik O (0,0). Hasil pencerminan terhadap titik asal adalah nilai absis dan ordinat menjadi kebalikannya. Letak titik A(a, b) menjadi berada pada titik A'(-a, -b) karena pencerminan terhadap titik asal O(0, 0).



$$A(a,b)\xrightarrow{\text{titik } O(0,0)} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

6. **Pencerminan terhadap Garis x = h**

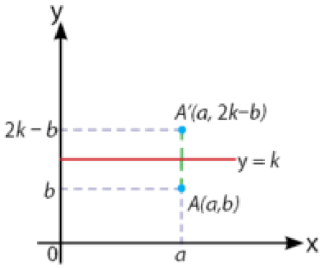
Pencerminan terhadap garis x = h akan membuat titik absis bergeser sejauh 2h, sedangkan nilai titik ordinatnya tetap. Letak titik A(a, b) menjadi berada pada titik A'(2h – a, b) karena pencerminan terhadap sumbu x = h.



$$A(a,b)\xrightarrow{\text{garis } x=h} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h-a \\ b \end{pmatrix}$$

7. **Pencerminan terhadap Garis y = k**

Pencerminan terhadap garis y = k akan membuat titik ordinatnya bergeser sejauh 2k, sedangkan nilai titik absisnya tetap. Letak titik A(a, b) menjadi berada pada titik A'(a, 2k – b) karena pencerminan terhadap sumbu y = k.



$$A(a,b) \xrightarrow{\text{garis } y=k} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2k-b \end{pmatrix}$$

H. Soal dan Latihan

1. Lantai ruangan berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang 8 m dan lebar 6 m. Jika lantai tersebut akan dipasangi keramik berukuran 20 cm x 20 cm. Berapa jumlah keramik yang dibutuhkan?

   Pembahasan:

   Diketahui ukuran lantai = 8 m, lebar = 6 m
   Ukuran keramik = 20 cm x 20 cm
   Ditanyakan jumlah keramik yang dibutuhkan?
   Untuk mengetahui jumlah keramik yang dibutuhkan, kita harus menghitung
   luas lantai dan luas keramik.
   Luas lantai
   L = p x l
   L = 8 m x 6 m
   L = 48 m2 = 480.000 cm^2

   Luas keramik
   L = p x l
   L = 20 cm x 20 cm
   L = 400 cm^2
   Keramik yang dibutuhkan = L. lantai : L. keramik

Keramik yang dibutuhkan = 480.000 : 400
Keramik yang dibutuhkan = 1.200
Jadi, jumlah keramik yang dibutuhkan adalah 1.200

2. Reno memiliki Layang-layang dengan panjang diagonal 1 = 46 cm dan panjang diagonal 2 = 35 cm. Panjang masing-masing sisi pendeknya 30 cm, dan panjang masing-masing sisi panjangnya = 36 cm. Tentukan luas dan keliling layang-layang Reno!
   Pembahasan:
   Diketahui
   d1 = 46 cm, d2 = 35 cm, sisi pendek = 30 cm, sisi panjang = 36 cm
   Ditanyakan luas dan keliling?
   L = ½ x d1 x d2
   L = ½ x 46 x 35
   L = 805 cm^2

   K = 2 x (s1 + s2)
   K = 2 x (30 + 36)
   K = 132 cm
   Jadi, luas dan keliling layang-layang Reno adalah 805 cm^2 dan 132 cm

3. Ibu membeli 3 susu kaleng yang masing-masing berisi 1.000 ml. Susu tersebut akan dipindahkan separuhnya ke dalam ember berbentuk tabung berukuran diameter 14 cm dan tingginya 30 cm. Berapa ml sisa susu dalam kaleng?
   Pembahasan:
   Diketahui 3 susu = 3.000 ml = 3 liter

Diameter tabung = 14 cm, r = 7 cm, dan t = 30 cm
Ditanyakan sisa susu dalam kaleng?

V ember = π x r^2 x t
V ember = 22/7 x 7^2 x 30 = 4.620 cm^3 = 4,62 liter
V. 1/2 ember = 1/2 x 4,62 = 2,31 liter
Sisa susu = 3 liter - 2,31 liter = 0,69 liter
Jadi, sisa susu dalam kaleng sebanyak 0,69 liter

4. Alas sebuah limas berbentuk persegi. Tinggi limas 56 cm. Jika volume limas 1.512 cm^3, tentukan panjang rusuk alas limas!
Pembahasan:
Diketahui tinggi limas = 56 cm, V = 1.512 cm3
Ditanyakan panjang rusuk limas?
V = 1/3 x (s x s) x tinggi limas
1.512 = 1/3 x s^2 x 56
s^2 = 1.512 x 3 : 56
s^2 = 81
s = 9 cm
Jadi, panjang sisi (rusuk limas) = 9 cm

5. Panjang sebuah tangga 10 m disandarkan pada tembok sehingga ujung bawah tangga dari tembok 6 m. Jarak ujung atas tangga dari tanah adalah?
Pembahasan:
Dik:
Panjang tangga = 10m (sisi miring)
Jarak ujung tangga dan tembok = 6m (sisi alas)
Dit: jarak ujung tangga dari tanah (sisi tegak) ...?
Panjang tangga = AC

Jarak ujung tangga dan tembok = BC
Jarak ujung tangga dari tanah = AB

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$
$$AB = \sqrt{10^2 - 6^2}$$
$$AB = \sqrt{100 - 36}$$
$$AB = \sqrt{64}$$
$$AB = 8$$

Jadi, jarak ujung tangga dari tanah adalah 8m.

6. Tentukan bayangan dari A = (3, 7), apabila direfleksikan ke sumbu X kemudian dilatasi pada pusat (0, 0) menggunakan skala 2…

Pembahasan:

A' = (p, q) merupakan bayangan titik A jika direfleksikan terhadap sumbu x, maka

A' = (r, s) merupakan bayangan titik A' jika dilatasikan pada pusat (0, 0) dengan skala 2.

Refleksi titik A di sumbu x yaitu:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dilatasi titik A' ke pusat (0, 0) menggunakan skala 2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ -7 - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Jadi, titik A = (3, 7) apabila direfleksikan ke sumbu x kemudian dilatasi pada pusat (0, 0) menggunakan skala 2 yakni **(6, -14)**

BAB IV

STATISTIKA

Statistika adalah ilmu yang mempelajari semua hal tentang data, mulai pengumpulan, penyajian, analisis, sampai terbentuk suatu kesimpulan. Statistika merupakan ilmu yang harus dikuasai karena *everything-need statistics*. Dengan mempelajari statistik diharapkan siswa mampu untuk memiliki kemampuan dalam memhami informasi di kehidupan sehari-hari berdasarkan data atau ide-ide yang berarti kemampuan untuk memahami bagaimana memilih, hadir, mengurangi, dan menyajikan data yang digunakan dalam masalah yang ada.

Contohnya, menghitung rata-rata nilai ujian, menentukan banyaknya siswa yang suka membolos, menghitung tingkat kepatuhan siswa pada peraturan sekolah, dan masih banyak lainnya.

A. Populasi dan Sampel

1. Populasi

Populasi adalah koleksi lengkap semua

elemen yang akan diselidiki. Suatu koleksi dikatakan lengkap jika ia memuat semua subjek yang akan diselidiki. Populasi adalah objek yang dijadikan penelitian. Misalnya, jika kamu akan melakukan penelitian tentang pengaruh hormon steroid pada pertumbuhan ayam pedaging (broiler), maka populasi yang dipilih adalah ayam pedaging yang dibudidayakan oleh peternak.

2. Sampel

   Sampel adalah sebagian koleksi anggota yang dipilih dari populasi. Sampel adalah bagian dari populasi yang bisa dijadikan sumber informasi. Misalnya, dari banyaknya ayam pedaging yang dimiliki oleh peternak, kamu cukup mengambil beberapa saja untuk kamu amati selama proses penelitian. Artinya, kamu tidak perlu menjadikan semua ayam sebagai bahan penelitian.

B. Pengumpulan Data

Sebelum memulai penyajian data, kita pahami dahulu bagaimana cara-cara pengumpulan data. Ada beberapa metode dalam melakukan pengumpulan data, antara lain:

1. Observasi (pengamatan melibatkan semua indera (penglihatan, pendengaran, penciuman, pembau, perasa)
2. Wawancara, terbagi menjadi :
   a. Wawancara tidak terstruktur

1) merupakan langkah persiapan wawancara terstruktur
2) pertanyaan yang diajukan merupakan upaya menggali isu awal
3) sifat pertanyaan spontan

b. Wawancara terstruktur pertanyaan sudah disiapkan, karena sudah dirancang data atau informasi apa yang dibutuhkan. Adapun jenis wawancara adalah wawancara langsung dan wawancara tidak langsung (misalnya dengan telepon atau internet/online)

3. Kuesioner (daftar pertanyaan)
   a. Kuesioner adalah daftar pertanyaan tertulis yang ditujukan kepada responden. Jawaban responden atas semua pertanyaan dalamkuesioner kemudian dicatat atau direkam.
   b. Kuesioner merupakan metode pengumpulan data yang efisien bila peneliti mengetahui secara pasti data atau informasi apa yang dibutuhkan dan bagaimana variabel yang menyatakan informasi yang dibutuhkan tersebut diukur.

4. Pengukuran Fisik

   Jenis data dapat berupa data fisik, yaitu berupa obyek atau benda fisik, seperti tanah, bangunan, buku, kendaraan, dan lain-lain. Sementara itu, metode pengukuran fisik ini berupa memetakan obyek empirik ke obyek angka-angka dengan perubahan yang setara. Misalnya pada data tanah, kita dapat mengumpulkan data fisik tanah dari ukuran panjang (meter), lebar, jenis tanah atau jenis bebatuannya.

5. Percobaan Laboratorium

   Pengumpulan data dengan metode ini dilakukan di laboratorium. Sebelumnya, dilakukan perancangan percobaan (experimen design). Laboratorium yang dimaksud tidak hanya berupa ruangan untuk kegiatan biologi, kimia, fisika, kedokteran, atau ilmu rekayasa, namun dapat pula berupa setiap ruang yang memiliki pengendalian ketat untuk setiap faktornya

C. Penyajian Data

Beberapa jenis penyajian data di antaranya adalah berupa tabel dan grafik. Tabel menyajikan data ke dalam bentuk baris atau kolom sedemikian rupa sehingga memberikan informasi lebih kepada peneliti. Sedangkan grafik menyajikan data dari tabel tersebut menjadi bentuk visual yang lebih informatif lagi. Adapun bentuk penyajian data sebagai berikut:

1. Tabel

   Seperti yang dijelaskan sebelumnya, bentuk penyajian ini merangkum data ke dalam bentuk baris atau kolom. Adapun baris dan kolom tersebut dapat berupa kategori-kategori dan angka frekuensi. Terdapat 2 jenis, yaitu:

a. Tabel satu arah (*one-way table*), Merupakan tabel yang menunjukkan satu variabel atau karakteristik saja. Sebagai contoh data umur responden dari kuesioner Gambar 1.2. Seperti di Tabel 1.5 yang hanya menunjukkan 1 karakteristik jumlah responden, yaitu usia.

Tabel: Jumlah Responden Berdasarkan Umur

Kategori umur	**Jumlah responden**
< 20 tahun	10
21 – 30 tahun	15
31 – 40 tahun	25
> 40 tahun	10
Total	60

b. Tabulasi silang (lebih dari satu arah / two-way table), Merupakan metode tabulasi untuk merangkum data dengan dua atau lebih variabel secara bersamaan. Pada bentuk tabel, sisi (kolom) sebelah kiri dan baris atas menyatakan kelas untuk kedua variabel yang digunakan. Metode tabulasi silang ini dapat digunakan jika:
   1) salah satu variabel bersifat kualitatif dan lainnya kuantitatif
   2) kedua variabel berupa variabel kualitatif
   3) kedua variabel berupa variabel kuantitatif

   Contoh tabulasi silang dapat kita amati pada Tabel 1.6 yang terdiri dari 2 variabel, yaitu umur dan jenis kelamin. Umur ada di baris dan jenis kelamin ada di kolom

Tabel 1.6 Jumlah Responden Berdasarkan Umur dan Jenis Kelamin

Kategori umur	Jenis Kelamin	
	Laki-laki	**Perempuan**
< 20 tahun	5	5
21 – 30 tahun	10	5
31 – 40 tahun	12	13
> 40 tahun	2	8
Total	29	31

c. Tabel frekuensi, Merupakan tabel ringkasan data yang menunjukkan frekuensi atau banyaknya item atau obyek pada setiap kelas yang ada. Tujuannya adalah untuk mendapatkan informasi lebih dalam tentang data yang ada yang tidak dapat secara cepat diperoleh dengan melihat data aslinya. Langkah-langkah dalam menyusun distribusi frekuensi ini adalah:
   1) Menentukan range (R), yaitu selisih data tertinggi dengan data terendah
   2) Menentukan banyak kelas (k)
   3) Banyak kelas yang baik antara 5 – 15 kelas. Pendekatan yang cukup baik digunakan adalah k = 1 + 3,3 log n, di mana n menyatakan banyaknya data.
   4) Menentukan lebar interval (i) = (maksimum-minimum)/k
   5) Menetapkan batas-batas kelas
   6) Menghitung banyaknya data yang termasuk dalam tiap-tiap kelas

7) Menentukan titik tengah kelas
8) Menghitung frekuensi kumulatif dan relatifnya

Tabel 1.7 Data Usia Responden

19	20	23	24
27	28	32	36
37	38	38	40
41	41	45	47
50	51	55	56

Mari kita pelajari langkah pembuatan tabel frekuensi dengan contoh data usia dari 20 responden di Tabel 1.7.

1) Range = 56 – 19 = 37
2) Banyak kelas = 1 + 3,3 log (20) = 5,293 ~ 5
3) Lebar interval = 37/5 = 7,4 ~ 7
4) Batas kelas = 19-26; 27-34; 35 – 42; 43 – 50; 51-58

Sehingga dihasilkan tabel frekuensi seperti berikut :

Kategori umur	**Frekuensi**	**Frekuensi kumulatif**	**Frekuensi relatif**
19-26 Tahun	4	4	0,20
27-34 Tahun	3	7	0,35
35-42 Tahun	7	14	0,70
43-50 Tahun	3	17	0,85
51-58 Tahun	3	20	1,00
Total	20		

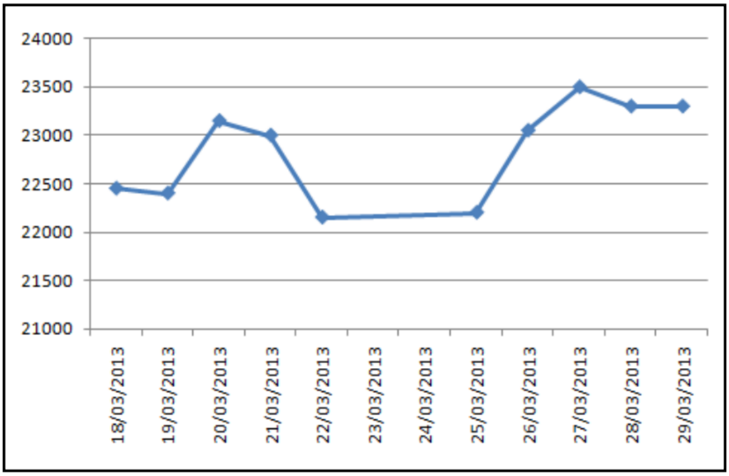
Tabel tersebut menunjukkan dari 20 responden, sejumlah 4 (atau 20%) di antaranya berumur 19-26 tahun. Selain itu, sejumlah responden terbanyak berumur 35-42 tahun. Apabila kita amati contoh tersebut merupakan aplikasi untuk data kuantitatif. Sedangkan untuk data kualitatif tentu akan lebih mudah, dimana perhitungan frekuensi langsung dilakukan berdasarkan kategorinya atau tidak perlu menghitung range hingga batas kelas.

2. Grafik

Penyajian data ke dalam tabel yang telah dibahas sebelumnya hanya menunjukkan data berupa angka-angka. Sebagai kelanjutannya, kita dapat membuat penyajian data dari tabel tersebut menjadi grafik-grafik yang lebih menarik dan informatif. Beberapa jenis grafik yang dapat digunakan adalah:

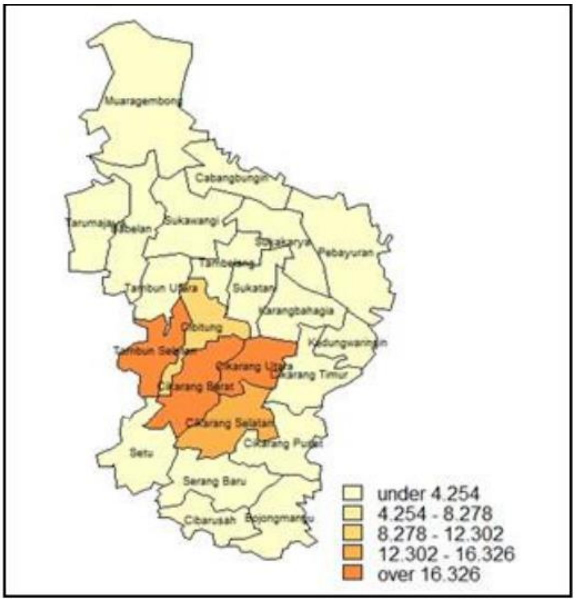
a. Grafik garis (*line chart*), untuk melihat pertumbuhan atau perkembangan suatu kejadian. Gambar 1.3 berikut menunjukkan perkembangan saham perusahaan PT "Y" periode 18 Maret hingga 29 Maret 2013. Dari grafik ini terlihat fluktuasi naik dan turun nilai saham, misalnya tertinggi adalah 23.500 dan terjadi pada 27 Maret 2913.

Gambar 1.3 Grafik Line Saham (Close) PT "Y"



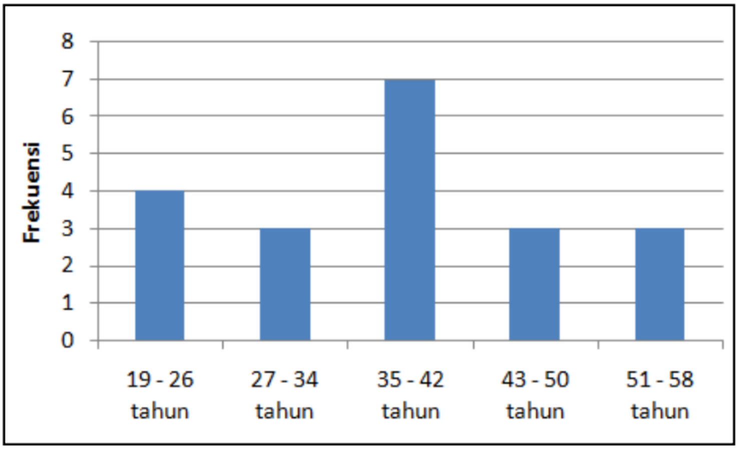
b. Grafik peta, untuk melihat atau menunjukkan lokasi suatu wilayah beserta atribut atau karakteristiknya. Grafik ini sangat penting apabila Anda tertarik pada analisis data spasial. Seperti pada contoh di Gambar 1.4, yang menunjukkan lokasi 23 kecamatan di Kabupaten Bekasi. Sementara itu, degradasi warna menunjukkan karakteristik persentase kontribusi Produk Domestik Regional Bruto setiap kecamatan pada 2010. Detail penjelasan penyajian ini akan dibahas pada kegiatan belajar selanjutnya.

Gambar 1.4 Grafik Peta Persentase Kontribusi Produk
Domestik Regional Bruto di Kab. Bekasi



c. Grafik Batang (bar graph), berfungsi untuk melihat distribusi atau perbandingan nilai, frekuensi, atau persentase di setiap kelas (kategori). Sumbu vertikal berupa nilai/frekuensi/persentase, dimana lebar tiap batang sama dengan interval kelas dan tinggi batang sesuai dengan nilai/frekuensi/persentase tiap-tiap kelas. Sedangkan sumbu horizontal menunjukkan nama-nama kelas. Data tabel frekuensi dari data Tabel 1.7 dapat kita lihat pada Gambar 1.5.

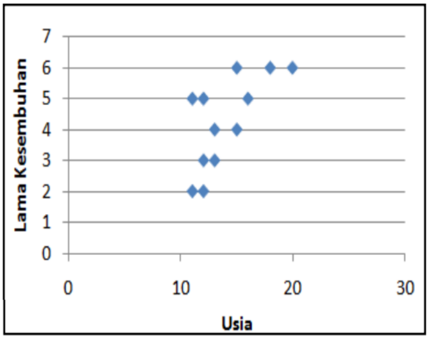
Gambar 1.5 Grafik Batang Frekuensi Responden Berdasarkan Umur



d. Grafik titik Merupakan metode persentasi secara grafis untuk menggambarkan hubungan antara dua variabel kuantitatif (Santoso, 2004). Salah satu variabel digambarkan pada sumbu horizontal dan variabel lainnya digambarkan pada sumbu vertikal. Pola yang ditunjukkan oleh titik-titik yang ada menggambarkan hubungan yang terjadi antar variabel. Sebagai contoh kita buat grafik titik yang menunjukkan hubungan antara usia (sumbu horizntal) dan lama kesembuhan penyakit diare (sumbu vertikal). Dapat kita amati secara visual bahwa ada hubungan sebanding antara keduanya, dimana semakin tinggi usia maka waktu kesembuhan juga semakin lama atau panjang.

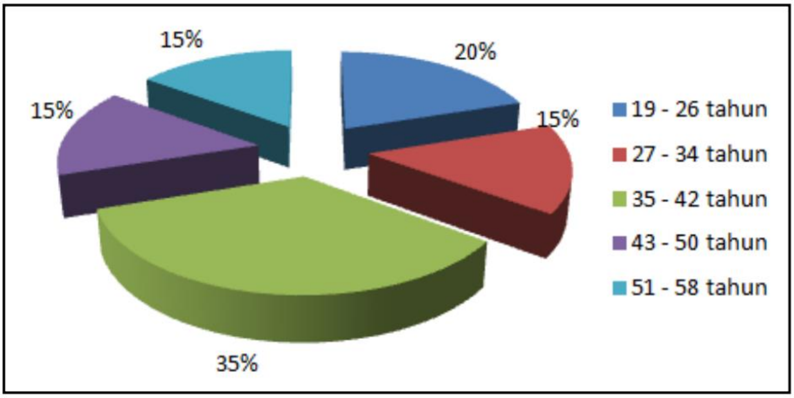
Gambar 1.6 Grafik Titik Usia dan Lama Kesembuhan

No	Usia	Lama sembuh (hari)
1	13	4
2	12	3
3	16	5
4	15	4
5	11	2
6	18	6
7	20	6
8	12	5
9	11	5
10	15	6
11	13	3
12	12	2



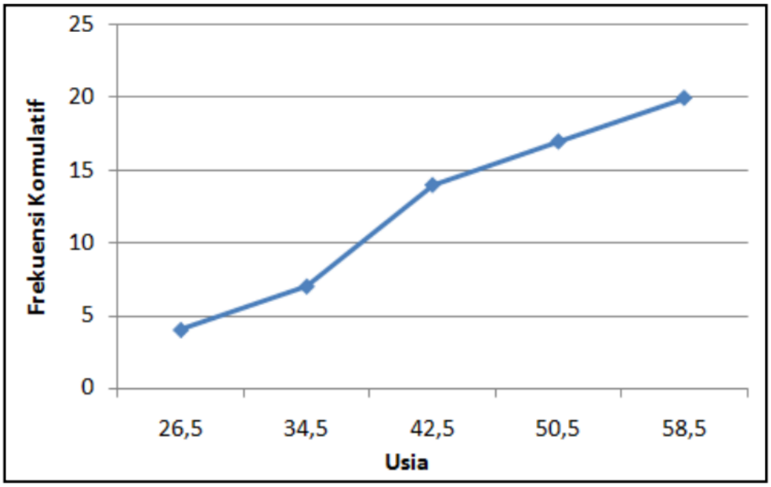
e. Grafik Lingkaran (pie chart) Grafik ini dapat berfungsi untuk melihat perbandingan (dalam persentase atau proporsi). Grafik ini juga mempresentasikan distribusi frekuensi relatif dari data kualitatif maupun data kuantitatif yang telah dikelompokkan. Caranya adalah dengan menggambar sebuah lingkaran, kemudian menggunakan frekuensi relatif untuk membagi daerah pada lingkaran menjadi sektor-sektor yang luasnya sesuai dengan frekuensi relatif tiap kelas atau kelompok. Contoh : bila total lingkaran adalah 3600 maka suatu kelas dengan frekuensi relatif 0,25 akan membutuhkan daerah seluas (0,25)(360)=900 dari total luas lingkaran. Hasil tabel frekuensi dari data umur Tabel 1.7 telah disajikan ke grafik batang di Gambar 1.5. Data tersebut dapat kita sajikan juga ke Pie Chart seperti Gambar 1.7 berikut.

Gambar 1.7 Pie Chart Umur Responden



f. Ogive Merupakan grafik yang menyajikan nilai kumulatif. Sumbu horizontal merupakan nilai data, sedangkan sumbu vertikal adalah dapat berupa frekuensi kumulatif, frekuensi relatif kumulatif, atau persen frekuensi kumulatif. Frekuensi yang digunakan (salah satu di atas) masing-masing kelas digambarkan sebagai titik. Setiap titik dihubungkan oleh garis lurus. Hasil tabel frekuensi dari data umur Tabel 1.7 dapat kita sajikan ke Ogive seperti pada Gambar 1.8 berikut. Ogive ini merupakan jenis ogive positif.

Gambar 1.8 Ogive Data Umur Responden



D. Ukuran Pemusatan

1. Rata-Rata (Mean)

Rata-rata (mean) merupakan metode yang paling banyak digunakan untuk menggambarkan ukuran tendensi sentral. Mean dihitung dengan menjumlahkan semua nilai data pengamatan kemudian dibagi dengan banyaknya data. Definisi tersebut dapat di nyatakan dengan persamaan berikut:

Sampel:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \text{ atau } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \text{ atau } \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Populasi:

$$\mu = \frac{\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}}{\boldsymbol{n}} \ \boldsymbol{atau}\ \mu = \frac{\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\boldsymbol{n}} \ \boldsymbol{atau}\ \mu = \frac{\boldsymbol{\sum x}}{\boldsymbol{n}}$$

Keterangan:

∑=lambang penjumlahan semua gugus data pengamatan

n=banyaknya sampel data

N=banyaknya data populasi

x̄ = nilai rata-rata sampel

μ = nilai rata-rata populasi

Mean dilambangkan dengan $\boldsymbol{\bar{x}}$ (dibaca "x-bar") jika kumpulan data ini merupakan contoh (sampel) dari populasi, sedangkan jika semua data berasal dari populasi, mean dilambangkan dengan μ (huruf kecil Yunani mu).

a. Rata-rata hitung (Mean) untuk data tunggal

Contoh:

Hitunglah nilai rata-rata dari nilai ujian matematika kelas 3 SMU berikut ini: 2; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 9

Jawab:

Diketahui: 2; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 9

n = 10

Penyelesaian:

$$\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{\boldsymbol{\sum x}}{\boldsymbol{n}} = \frac{2+4+5+6+6+7+7+7+8+9}{10} = \frac{61}{10}$$

$$= 6{,}10$$

b. Mean dari data distribusi Frekuensi atau dari gabungan

Distribusi Frekuensi: Rata-rata hitung dari data yang sudah disusun dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dapat ditentukan dengan menggunakan formula yang sama dengan formula untuk menghitung nilai rata-rata dari data yang sudah dikelompokkan, yaitu:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Keterangan:

$\sum$ = lambang penjumlahan semua gugus data pengamatan

f_i = frekuensi data ke-i

$\bar{x}$ = nilai rata-rata sampel

Contoh:

Tabel berikut ini adalah nilai ujian statistik 80 mahasiswa yang sudah disusun dalam tabel frekuensi. Pada contoh ini, tabel distribusi frekuensi dibuat dari data yang sudah dikelompokkan berdasarkan selang/kelas tertentu (banyak kelas = 7 dan panjang kelas = 10).

Kelas ke-	Nilai ujian	f_i
1	31-40	2
2	41-50	3
3	51-60	5
4	61-70	13
5	71-80	24

6	81-90	21
7	91-100	12
	Jumlah	80

Jawab:

Buat daftar tabel berikut, tentukan nilai pewakilnya ($\boldsymbol{x_i}$) dan hitung $\boldsymbol{f_i x_i}$.

Kelas ke-	Nilai ujian	$\boldsymbol{f_i}$	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{f_i x_i}$.
1	31-40	2	35,5	71,0
2	41-50	3	45,5	136,5
3	51-60	5	55,5	277,5
4	61-70	13	65,5	851,5
5	71-80	24	75,5	1812,0
6	81-90	21	85,5	1795,5
7	91-100	12	95,5	1146,0
	Jumlah	80		6090,0

$$\boldsymbol{\overline{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{f_i x_i}}{\sum \boldsymbol{f_i}}$$

$$\boldsymbol{\overline{x}} = \frac{6090}{80} = 76,1$$

c. Rata-rata Gabungan atau rata-rata terboboti (Weighted Mean)

Rata-rata gabungan (disebut juga grand mean, pooled mean, atau rata-rata umum) adalah cara yang tepat untuk menggabungkan rata-rata hitung dari beberapa sampel.

$$\boldsymbol{\overline{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{n_i x_i}}{\sum \boldsymbol{n_i}} = \boldsymbol{\overline{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{f_i x_i}}{\sum \boldsymbol{f_i}}$$

Contoh:
Tiga sub sampel masing-masing berukuran 10, 6, 8 dan rata-ratanya 145, 118, dan 162. Berapa rata-ratanya?
Jawab:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{n_i x_i}}{\sum \boldsymbol{n_i}}$$

$$= \frac{\mathbf{(10)(145) + (6)(118) + (8)(162)}}{\mathbf{10 + 6 + 8}} = \mathbf{143{,}9}$$

2. Median

Median dari n pengukuran atau pengamatan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah nilai pengamatan yang terletak di tengah gugus data setelah data tersebut diurutkan. Apabila banyaknya pengamatan (n) ganjil, median terletak tepat ditengah gugus data, sedangkan bila n genap, median diperoleh dengan cara interpolasi yaitu rata-rata dari dua data yang berada di tengah gugus data. Dengan demikian, median membagi himpunan pengamatan menjadi dua bagian yang sama besar, 50% dari pengamatan terletak di bawah median dan 50% lagi terletak di atas median. Median sering dilambangkan dengan $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (dibaca "x-tilde") apabila sumber datanya berasal dari sampel $\tilde{\mu}$ (dibaca "μ-tilde") untuk median populasi. Median tidak dipengaruhi oleh nilai-nilai aktual dari pengamatan melainkan pada posisi mereka. Prosedur untuk menentukan nilai median, pertama urutkan data terlebih dahulu, kemudian ikuti salah satu prosedur berikut ini:

- Banyak data ganjil → mediannya adalah nilai yang berada tepat di tengah gugus data
- Banyak data genap → mediannya adalah rata-rata dari dua nilai data yang berada di tengah gugus data

a. Median data tunggal:

Untuk menentukan median dari data tunggal, terlebih dulu kita harus mengetahui letak/posisi median tersebut. Posisi median dapat ditentukan dengan menggunakan formula berikut:

$$\boldsymbol{Posisi\ Median} = \frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$$

Keterangan: $\boldsymbol{n}$ = banyaknya data pengamatan.

Median apabila n ganjil:

Contoh:

Hitunglah median dari nilai ujian matematika kelas 3 SMU berikut ini: 8; 4; 5; 6; 7; 6; 7; 7; 2; 9; 10

Jawab:

data: 8; 4; 5; 6; 7; 6; 7; 7; 2; 9; 10

setelah diurutkan: 2; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 9; 10

banyaknya data (n) = 11

Posisi Me = $\frac{(11+1)}{2} = 6$

jadi Median = 7 (data yang terletak pada urutan ke-6)

Median apabila n genap:

Contoh:

Hitunglah median dari nilai ujian matematika kelas 3 SMU berikut ini: 8; 4; 5; 6; 7; 6; 7; 7; 2; 9

Jawab:

data: 8; 4; 5; 6; 7; 6; 7; 7; 2; 9

setelah diurutkan: 2; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 9

banyaknya data (n) = 10

posisi Me =$\frac{(10+1)}{2} = 5{,}5$

Data tengahnya: 6 dan 7

jadi Median = $\frac{(6+7)}{2} = 6{,}5$ (rata-rata dari 2 data yang terletak pada urutan ke-5 dan ke-6)

b. Median dalam distribusi frekuensi

Formula untuk menentukan median dari tabel distribusi frekuensi adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Me = b + p\left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f}\right)}$$

$\boldsymbol{b}$ = batas bawah kelas median dari kelas selang yang mengandung unsur atau memuat nilai median

$\boldsymbol{p}$ = panjang kelas median

$\boldsymbol{n}$ = ukuran sampel/banyak data

$\boldsymbol{f}$ = frekuensi kelas median

$\boldsymbol{F}$ = Jumlah semua frekuensi dengan tanda kelas lebih kecil dari kelas median ($\sum \boldsymbol{f_i}$)

Contoh:

Tabel berikut ini adalah nilai ujian statistik 80 mahasiswa yang sudah disusun dalam tabel frekuensi. Pada contoh ini, tabel distribusi frekuensi dibuat dari data yang sudah dikelompokkan berdasarkan selang/kelas tertentu (banyak kelas = 7 dan panjang kelas = 10). Tentukan nilai median dari tabel distribusi frekuensi.

Kelas ke-	Nilai ujian	f_i
1	31-40	2
2	41-50	3
3	51-60	5
4	61-70	13
5	71-80	24
6	81-90	21
7	91-100	12
	Jumlah	80

Jawab:

Kelas ke-	Nilai ujian	f_i	f_{kum}	
1	31-40	2	2	
2	41-50	3	5	
3	51-60	5	10	
4	61-70	13	23	
5	71-80	24	47	← letak kelas median
6	81-90	21	68	

7	91-100	12	80
	Jumlah	80	

- Letak kelas median: Setengah dari seluruh data = 40, terletak pada kelas ke-5 (nilai ujian 71-80)
- $\boldsymbol{b}$ = 70.5, p = 10
- $\boldsymbol{n}$ = 80, f = 24
- $\boldsymbol{f}$ = 24 (frekuensi kelas median)
- $\boldsymbol{F}$ = 2 + 3 + 5 + 13 = 23

$$\boldsymbol{Me = b + p \left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f}\right)}$$

$$\boldsymbol{Me} = 70{,}5 + 10 \left(\frac{\frac{1}{2}(80) - 23}{24}\right)$$

$$= 77{,}58$$

3. Modus

   Modus adalah data yang paling sering muncul/terjadi. Untuk menentukan modus, pertama susun data dalam urutan meningkat atau sebaliknya, kemudian hitung frekuensinya. Nilai yang frekuensinya paling besar (sering muncul) adalah modus. Modus digunakan baik untuk tipe data numerik atau pun data kategoris. Modus tidak dipengaruhi oleh nilai ekstrem. Beberapa kemungkinan tentang modus suatu gugus data:

- Apabila pada sekumpulan data terdapat dua mode, maka gugus data tersebut dikatakan bimodal.
- Apabila pada sekumpulan data terdapat lebih dari dua mode, maka gugus data tersebut dikatakan multimodal.
- Apabila pada sekumpulan data tidak terdapat mode, maka gugus data tersebut dikatakan tidak mempunyai modus.

Meskipun suatu gugus data mungkin saja tidak memiliki modus, namun pada suatu distribusi data kontinyu, modus dapat ditentukan secara analitis.

- Untuk gugus data yang distribusinya simetris, nilai mean, median dan modus semuanya sama.
- Untuk distribusi miring ke kiri (negatively skewed): mean < median < modus
- untuk distribusi miring ke kanan (positively skewed): terjadi hal yang sebaliknya, yaitu mean > median > modus.

a. Modus Data Tunggal:

Contoh:

Berapa modus dari nilai ujian matematika kelas 3 SMU berikut ini:

2, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9

2, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9

Jawab:

2, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9→ Nilai yang sering muncul adalah angka 7 (frekuensi terbanyak = 3), sehingga Modus (M) = 7

2, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9 → Nilai yang sering muncul adalah angka 6 dan 7 (masing-masing muncul 3 kali), sehingga Modusnya ada dua, yaitu 6 dan 7. Gugus data tersebut dikatakan bimodal karena mempunyai dua modus. Karena ke-2 mode tersebut nilainya berurutan, mode sering dihitung dengan menghitung nilai rata-rata keduanya, $\frac{1}{2}(6+7) = 6.5$.

b. Mode dalam Distribusi Frekuensi:

$$\boldsymbol{Mo = b + p\left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right)}$$

dimana:

Mo = modal = kelas yang memuat modus

b = batas bawah kelas modal

p = panjang kelas modal

$\boldsymbol{b_{mo}}$ = frekuensi dari kelas yang memuat modus (yang nilainya tertinggi)

$\boldsymbol{b_1}$ = $\boldsymbol{b_{mo}} - \boldsymbol{b_{mo}}$-1 = frekuensi kelas modal – frekuensi kelas sebelumnya

$\boldsymbol{b_2}$ = $\boldsymbol{b_{mo}} - \boldsymbol{b_{mo}}$+1 = frekuensi kelas modal – frekuensi kelas sesudahnya

Contoh:

Tabel berikut ini adalah nilai ujian statistik 80 mahasiswa yang sudah disusun dalam tabel frekuensi. Pada contoh ini, tabel distribusi frekuensi dibuat dari data yang sudah dikelompokkan berdasarkan selang/kelas tertentu (banyak kelas = 7 dan panjang kelas = 10). Tentukan nilai median dari tabel distribusi frekuensi.

Kelas ke-	Nilai ujian	f_i
1	31-40	2
2	41-50	3
3	51-60	5
4	61-70	13
5	71-80	24
6	81-90	21
7	91-100	12
	Jumlah	80

Tentukan nilai median dari tabel distribusi frekuensi.

Jawab:

Kelas ke-	Nilai ujian	f_i	
1	31-40	2	
2	41-50	3	
3	51-60	5	
4	61-70	13	
			$\rightarrow b_1 = (24 - 13) = 11$
5	71-80	24	← kelas modal (frekuensinya paling besar)
			$\rightarrow b_1 = (24 - 21) = 3$
6	81-90	21	
7	91-100	12	

Jumlah	80

- Kelas modul =kelas ke-5
- b = 71-0.5 = 70.5
- b1 = 24 -13 = 11
- b2 = 24 – 21 = 3
- p = 10

$$\boldsymbol{Mo = b + p\left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right)}$$

$$\boldsymbol{Mo} = 70{,}5 + 10\left(\frac{11}{11+3}\right) = 78{,}36$$

4. Varian dan Simpangan Baku

Varian dan standar deviasi (simpangan baku) adalah ukuran-ukuran keragaman (variasi) data statistik yang paling sering digunakan. Standar deviasi (simpangan baku) merupakan akar kuadrat dari varian. Berikut ini adalah rumus varians:

Rumus varian:

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}}$$

Rumus standar deviasi (simpangan baku):

$$\boldsymbol{s = \sqrt{\frac{n\ \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_1\right)^2}{n(n-1)}}}$$

Keterangan:

$\boldsymbol{s^2}$ = varians

$\boldsymbol{s}$ = standar deviasi (simpangan baku)

$\boldsymbol{n}$ = jumlah data yang tersedia (ukuran sampel)

$\boldsymbol{x_i}$ = nilai x ke-i

Contoh:

Dalam sebuah kelas, nilai matematika 10 orang siswa adalah sebagai berikut: 45, 78, 65, 98, 62, 75, 78, 80, 73, dan 96.

Dari data tersebut, Anda dapat mengetahui bahwa jumlah data/sampel yang tersedia adalah 10. Maka dari itu, n = 10.

Untuk mempermudah proses berhitung, kita dapat menentukan nilai kuadrat dari tiap data terlebih dahulu.

Data ke-	x_i	${x_i}^2$
1	45	2025
2	78	6084
3	65	4225
4	98	9604
5	62	3844
6	75	5625
7	78	6084
8	80	6400
9	73	5329
10	96	9216
Jumlah ($\sum$)	**750**	**58.436**

Jawab:

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

$$s^2 = \frac{(10)\,(58.436)\ -\ (750)^2}{10(10-1)}$$

$$s^2 = \frac{584.360 - 562.500}{(10)\,(9)}$$

$$s^2 = \frac{21.860}{90}$$

$$s^2 = 242,89$$

Standar deviasi merupakan akar kuadrat dari varians, maka nilai standar deviasi untuk sampel tersebut adalah sebagai berikut:

$$s = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_1)^2}{n(n-1)}}$$

$$s = \sqrt{\frac{(10)\,(58.436) - (750)^2}{10(10-1)}}$$

$$s = \sqrt{242,89}$$

$$s = 15,58$$

E. Soal dan Latihan

1. Data tinggi badan 10 orang siswa (cm) sebagai berikut:

12	12	13	12	13	12	13	12	13	13
4	8	0	0	4	0	0	4	0	0

Tentukan median data diatas…

Jawab:

Urutkan data tersebut dari yang terkecil sampai yang terbesar sebagai berikut:

12	12	12	12	12	13	13	13	13	13
0	0	4	4	8	0	0	0	0	4

Data paling tengah = 128 dan 130

Maka median dapat dihitung sebagai berikut:

$$Median = \frac{128 + 130}{2} = 129\ cm$$

2. Angka berikut menunjukkan hasil survei curah hujan tahunan pada suatu wilayah (dalam mm) selama 30 tahun antara tahun 1960-1990.

123	117	83	140	97	110	117	86
116	79	130	63	95	103	98	119
84	136	87	91	107	122	74	98
80	82	90	125	105	97		

Buat tabel frekuensi dari data di atas !

Carilah rata-rata, median dan modus dari tabel diatas!

Jawab:

Dari data pada soal dapat dibuat tabel frekuensi dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1) Range : 140-63 = 77
2) k = 1 = 3,3 log 30 = 5,8745 ≈ 6
3) i = $\frac{77}{6}$ = 12,8 ≈ 13
4) interval kelasnya: 63-75, 76-88, 89-101, 102-114, 115-127, 128-140.
5) Batas kelasnya : 62,5 75,5 88,5 101,5 114,5 127,5 140,5
6) Menetapkan turus, yaitu menandai setiap data (angka atau nilai pengamatan) dalam suatu interval kelas tertentu.
7) Menentukan frekuensi f, frekuensi kumulatif dan frekuensi relatif.

Tabel Frekuensi Curah Hujan

Kelas	**Interval**	**Titik tengah**	**Turus**	**Frekuensi (f)**	**Frek. Kumulatif**	**Frek. Relatif**
1	63-75	69	II	2	2	0,067
2	76-88	82	IIIII II	7	9	0,233
3	89-101	95	IIIII II	7	16	0,233
4	102-114	108	IIII	4	20	0,133
5	115-127	121	IIIII II	7	27	0,233
6	128-140	134	III	3	30	0,100
Jumlah				30		1,000

BAB V

PELUANG

A. Ruang Sampel, Titik Sampel dan Kejadian

Ruang sampel merupakan himpunan semua kejadian yang mungkin diperoleh dari suatu percobaan. Sedangkan anggota-anggota dari ruang sampel disebut titik sampel.

Ruang sampel disimbolkan dengan huruf S, sedangkan anggota-anggota ruang sampel didaftar dengan menuliskannya di antara dua kurung kurawal, masing-masing anggota dipisah dengan tanda kurung.

Contoh:

Pada percobaan melempar sebuah dadu sebanyak satu kali.

S = {1,2,3,4,5,6}

n (S) = 6 angka-angka 1,2,3,4,5 dan 6 disebut titik sampel

Kejadian atau peristiwa adalah himpunan

bagian dari ruang sampel. Karena kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel maka biasanya disimbolkan dalam huruf besar. Kejadian dinotasikan dengan K, adalah himpunan salah satu kemungkinan hasil. Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Banyak anggota kejadian dinotasikan dengan n (K), menentukan anggota suatu kejadian dapat dilakukan dengan cara mendaftar semua titik sampel, kemudian dipilihlah kejadian yang diharpakan muncul.

B. Peluang Suatu Kejadian

Peluang atau probabilitas adalah kemungkinan sebuah kejadian dapat terjadi. Percobaan merupakan suatu proses yang dilakukan untuk kemudian memperoleh suatu hasil pengukuran, perhitungan, ataupun pengamatan. Himpunan dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut ruang sampel (S). Sehingga kejadian atau peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel atau bagian dari hasil percobaan yang diinginkan.

Nilai probalitas antara 0 – 1. Kejadian yang mempunyai nilai probabilitas 0 adalah kejadian yang mustahil terjadi atau tidak mungkin terjadi. Sedangkan kejadian yang mempunyai nilai probalilitas 1 adalah kejadian yang pasti terjadi atau kejadian yang sudah terjadi.

Peluang atau probabilitas suatu kejadian A dapat terjadi dengan k dan mungkin hasil terjadi m cara sebagai:

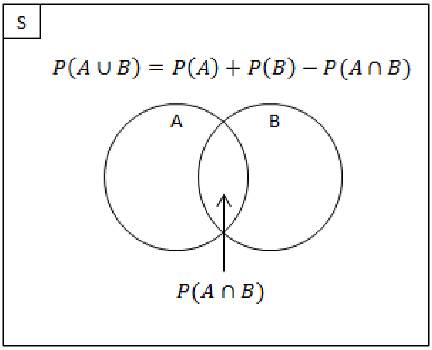
$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}$$

Frekuensi harapan suatu kejadian adalah hasil kali banyaknya percobaan dengan peluang kejadian yang akan terjadi dalam suatu percobaan atau:

$$\boldsymbol{F_n}(\mathbf{E}) \;=\; \mathbf{n.P\ (A)}$$

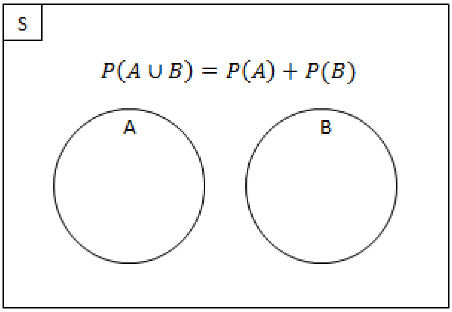
1. Peluang Kejadian Majemuk

   Peluang Gabungan Dua Kejadian. Dua buah kejadian A dan B dikatakan gabungan dua kejadian jika kejadian A dan B kejadian dapat terjadi bersamaan sehingga menghasilkan rumus:



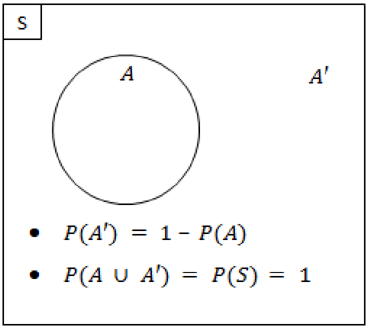
2. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

   Dua buah kejadian A dan B dikatakan gabungan dua kejadian saling lepas jika kejadian A dan B tidak mungkin terjadi bersamaan. Sehingga menghasilkan rumus:



3. Peluang Komplemen suatu Kejadian

Kejadian merupakan komplemen/kebalikan A sehingga A dan A' merupakan kejadian saling lepas, maka A A'= ∅. Sehingga menghasilkan rumus:



4. Peluang Kejadian Bersyarat

Dua kejadian disebut kejadian bersyarat jika munculnya kejadian pertama A mempengaruhi peluang munculnya kejadian kedua B. Maka peluang terjadinya kejadian B yang dipengaruhi oleh kejadian A ditulis dengan $P(A \cap B)$. Bila $P(A \cap B)$ adalah peluang terjadinya A dan B, maka:

$$\mathbf{P\ (B|A)\ = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (A)}}$$

C. Pencacahan Titik Sampel

Konsep yang berkaitan dengan menentukan banyak nya cara suatu percobaan yang dapat terjadi. Menentukan banyak nya cara suatu percobaan dapat terjadi di lakukan dengan aturan penjumlahan, aturan perkalian. Peluang berhubungan erat dengan penentuan banyak titik sampel. Banyaknya titik sampel dapat ditentukan dengan menggunakan kaidah pencacahan, yaitu dengan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi. Aturan perkalian adalah aturan yang digunakan dalam menentukan banykanya titik sampel dengan cara mengalihkan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.

D. Permutasi

Permutasi yaitu cara menyusun sebuah pengujian/kejadian dengan mencermati urutan. Di dalam ilmu matematika permutasi didefinisikan sebagai sebuah konsep penyusunan sekumpulan objek/angka menjadi beberpaa urutan berbeda tanpa mengalami pengulangan. Dalam metode pencacahan ini, $AB \neq BA$ contohnya $12 \neq 21$. Jadi, permutasi merupakan penyusunan kembali suatu kumpulan objek dalam urutan yang berbeda dari urutan yang semula. Rumus permutasi adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Keterangan:

n = jumlah objek yang bisa dipilih
P = permutasi
r = jumlah yang harus dipilih

Contoh:

Disebuah kelas terdapat 4 orang siswa yang dicalonkan untuk mengisi posisinya bendahara dan sekretaris. Tentukan banyaknya cara yang bisa digunakan untuk mengisi posisi tersebut.

Jawab:

Soal di atas bisa dituliskan sebagai permutasi

Diketahui: P(4,2)

n (banyaknya siswa) = 4
k (jumlah posisi) = 2.

Masukkan ke dalam rumus:

$$\boldsymbol{P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

$$\boldsymbol{P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!}}$$

$$\boldsymbol{P_2^4 = \frac{4x3x2x1}{2x1}}$$

$$\boldsymbol{P_2^4 = \frac{24}{2}}$$

$$\boldsymbol{P_2^4 = 12}$$

Jadi terdapat 12 cara untuk mengisi posisi tersebut.

E. Kombinasi

Kombinasi yaitu cara menyusun sebuah pengujian/kejadian tanpa mencermati urutan. Dalam metode pencacahan ini, $AB = BA$. Banyak kombinasi r unsur dari n unsur yang tersedia dapat dituliskan C_r^n atau nCr atau C(n,r) dengan $r \leq n$.

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Keterangan:

n= jumlah objek yang bisa dipilih

C= kombinasi

r= jumlah yang harus dipilih

Contoh:

Sebuah pertemuan dihadiri oleh 10 orang, apabila tiap orang silih berganti berjabat tangan satu dengan yang lain. Tentukan banyak jabat tangan yang dilakukan?

Jawab:

$$C_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!\,2!}$$

$$C_2^{10} = \frac{10x9x8!}{8!\,2!}$$

$$C_2^{10} = \frac{10x9}{2x1}$$

$$C_2^{10} = \frac{90}{2}$$

$$C_2^{10} = 45$$

F. Peluang Kejadian Saling Lepas

Dua kejadian dikatakan saling lepas apabila kedua kejadian tersebut tidak dapat terjadi secara bersamaan. Sebagai contoh, bila kita melempar sebuah dadu, kita tidak mungkin memperoleh bilangan ganjil dan bilangan genap sekaligus. Kejadian munculnya bilangan ganjil dan kejadian munculnya bilangan genap pada pelemparan sebuah dadu merupakan dua kejadian yang saling lepas.

Menggunakan notasi himpunan dan peluang, jika A dan B adalah dua kejadian dalam suatu percobaan, maka A dan B saling lepas apabila

P(A ∩ B) = 0.
Dirumuskan:

$$\mathbf{P(A \cap B) = 0}$$

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Contoh soal:

Sebuah dadu merah dan sebuah dadu putih dilantunkan serentak satu kali. Tentukanlah peluang munculnya angka 3 pada dadu merah atau angka 5 pada dadu putih ...

Jawab:

n(S) = 6 x 6 = 36
A = {31, 32, 33, 34, 35, 36}, n(A) = 6
B = {15, 25, 35, 45, 55, 65}, n(B) = 6
A U B = {35}, n(A ∩ B) = 1

Karena A dan B tidak saling lepas, maka:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

G. Peluang Bersyarat

Hubungan kedua peristiwa A dan peristiwa B yang terdapat antara peristiwa adalah hubungan bersyarat. Dua peristiwa dikatakan mempunyai hubungan bersyarat jika peristiwa yang satu menjadi syarat terjadinya peristiwa yang lain. Peristiwa tersebut ditulis dengan A|B untuk menyatakan peristiwa A terjadi dengan didahului terjadinya peristiwa B. Peluangnya ditulis P(A|B) yang disebut peluang bersyarat.

Jika A dan B adalah dua kejadian dalam ruang sampel S dan P(A) 0, maka peluang bersyarat dari B yang diberikan A didefinisikan sebagai:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ atau } P(A \cap B) = P(A).\ P(B|A)$$

P(B|A) dibaca peluang kejadian B jika kejadian A sudah terjadi.

Ketika keluarnya kejadian A dan berpengaruh kepada kemungkinan keluarnya kejadian B atau keluarnya B mempengaruhi keluarnya kejadian A, A dan B merupakan kejadian Bersyarat, sehingga:

a. Kemungkinan Kejadian A dengan syarat kejadian B terlebih dahulu:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(B)\ x\ P\left(\frac{A}{B}\right)}$$

b. Kemungkinan Kejadian B dengan syarat kejadian A terlebih dahulu:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A) x P\left(\frac{A}{B}\right)}$$

Contoh:

Dua buah dadu dilempar undi bersama, tentukan peluang muncul jumlah mata dadu lebih besar dari 9 dengan syarat dadu pertama muncul 5**.**

Penyelesaian:

		II					
		1	2	3	4	5	6
I	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,6)	(6,5)	(6,6)

Kejadian Jumlah mata dadu lebih dari 9 dengan syarat dadu pertama muncul 5

Ruang sampelnya adalah muncul mata dadu pertama 5

S= {(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}, n(S) = 6

Kejadian A adalah kejadian mata dadu berjumlah lebih dari 9 dalam ruang sampel tersebut

A= {(5,5), (5,6)}, n(A) = 2

Peluang kejadian muncul mata dadu lebih dari 9 dengan syarat dadu ke I muncul angka 5,

Rumus:

$$P\ (A|\ B) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (B)}$$

Ruang sampel, n(S) = 36

$n(A \cap B) = 2, P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

n(B)=5, P(B)=$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

sehingga

$P\ (A|\ B) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (B)}$

$P\ (A|\ B) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}$

$P\ (A|\ B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

H. Peluang Kejadian Saling Bebas

Peristiwa A dan Kejadian B disebut saling bebas ketika kejadian A tidak berpengaruh pada kejadian B begitupula kebalikannya. Jika A dan B adalah dua kejadian dalam suatu percobaan, Bila tidak sama maka dikatakan bahwa peristiwa A dan B tidak saling bebas. Maka A dan B saling bebas apabila $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Contoh:

Jason bermain ludo dan ingin mengeluarkan dua buah dadu, Berapa besar kemungkinan keluarnya di dadu 1angka genap dan di dadu 2 angka prima…

Jawab:

Misalnya:

A= Kejadian keluarnya dadu angka genap

Dadu 1= {2,4,6}, maka $P(A) = \frac{3}{6}$

B = Kejadian keluarnya dadu kedua angka ganjil prima = {3,5},

jadi $P(B) = \frac{2}{6}$

Bisa kita lihat kejadian A tidak mengubah kejadian B, oleh karena itu, bisa disebut sebagai kejadian saling bebas. Peluang keluarnya kejadian A dan adalah:

$$P\ (A \cap B)\ = P(A)\ \text{x}\ P(B)$$

$$P\ (A \cap B)\ = \frac{3}{6} x \frac{2}{6}$$

$$P\ (A \cap B)\ = \frac{1}{6}$$

I. Soal dan Latihan

1. Sebuah dadu dilempar 100 kali. dari hasil pelemparan tersebut muncul mata dadu bernomor 3 sebanyak 17 kali dan mata dadu bernomor 5 sebanyak 18 kali. Peluang muncul mata dadu bernomor 3 dan 5 adalah ....

Jawaban:

A = mata dadu bernomor 3

$P(A) = \frac{17}{100}$

B = mata dadu bernomor 5

$P(B) = \frac{18}{100}$

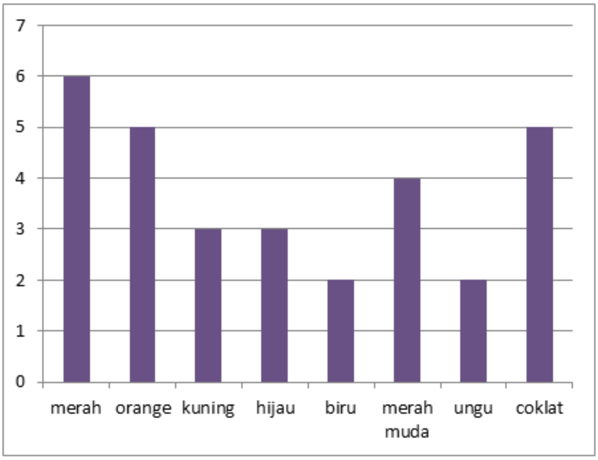
$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$= \frac{17}{100} + \frac{18}{100}$

$= \frac{35}{100}$

$= \frac{7}{20}$

2. Roni memperbolehkan ibunya untuk mengambil satu permen dari sebuah kantong. Dia tidak dapat melihat warna permen tersebut. Banyaknya permen dengan setiap warna dalam kantong tersebut ditunjukkan dalam grafik berikut.



Jawab:

Jumlah permen merah = n(M) = 6

Jumlah permen orange = n(O) = 5

Jumlah permen kuning = n(K) = 3
Jumlah permen hijau = n(H) = 3
Jumlah permen biru = n(B) = 2
Jumlah permen merah muda = n(Md) = 4
Jumlah permen ungu = n(U) = 2
Jumlah permen coklat = n(C) = 5
Jumlah seluruh permen = n(S) = 6 + 5 + 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 5 = 30

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} \times 100\%$$

$$= \frac{6}{30} \times 100\%$$

$$= \frac{1}{5} \times 100\%$$

$$= 20\%$$

3. Suatu survei dilakukan terhadap 100 siswa peserta OSN tingkat kaupaten/ kota berkaitan dengan frekuensi pengiriman sms pada suatu hari. Hasil yang diperoleh sebagai berikut:

Jumlah sms	**Persentase**
1-10	5%
11-20	10%
21-30	15%
31-40	20%
41 atau lebih	25%

Jawab:

Banyak peserta OSN = n(S) = 100

Siswa yang tidak mengirim sms = 100% - (5% + 10% + 15% + 20% + 25%)

= 100% - 75%

= 25%

A = siswa yang mengirim sms tidak lebih dari 30 kali (yang tidak sms dan yang sms kurang dari sama dengan 30, yaitu yang mengirim pesan 1- 30) = 25% + 5% + 10% + 15% = 55%

Maka:

n(A) = 55% x n(S)

= 55% x 100

= 55

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{55}{100}$$

$$= 0{,}55$$

4. Jika 2 bola biru sejenis, 3 bola merah yang sejenis, dan 4 bola kuning yang sejenis disusun secara teratur dalam satu baris, maka banyak susunan adalah…

Jawab:

Diketauhi:

Jumlah semua bola (n) = 9

bola biru (n1) = 2

bola merah (n2) = 3

bola kuning (n3) = 4

$$P_{2,3,4}^{9} = \frac{9 \, x \, 8 \, x \, 7 \, x \, 6 \, x \, 5 \, x \, 4!}{2! \, x \, 3! \, x \, 4!}$$

$$P_{2,3,4}^{9} = \frac{9 \, x \, 8 \, x \, 7 \, x \, 6 \, x \, 5}{2! \, x \, 3!}$$

$$P_{2,3,4}^{9} = \frac{9 \, x \, 8 \, x \, 7 \, x \, 5}{2!}$$

$$P_{2,3,4}^{9} = \frac{2.520}{2}$$

$$P_{2,3,4}^{9} = 1.260$$

5. Budi ingin membeli 5 potong roti di sebuah toko yang menjual 8 jenis roti berbeda. Di antara kelima itu, Budi sudah menentukan 2 roti yang akan dipilihnya, berapa banyak kombinasi roti yang mungkin dibeli oleh Budi?

   Jawab:

   Karena Budi sudah memastikan akan memilih 2 roti, artinya tersisa 3 slot roti lagi yang akan dipilih oleh Budi dan juga tersisa 6 pilihan dari semua jenis yang bisa dipilih Budi. Oleh karena itu pengerjaannya adalah sebagai berikut:

   $$C_3^6 = \frac{6!}{((6-3)!3!)}$$

   $$C_3^6 = \frac{(6x5x4x3x2x1)}{((3x2x1)\,(3x2x1))}$$

   $$C_3^6 = \frac{(6x5x4)}{(3x2x1)}$$

   $$C_3^6 = \frac{120}{6}$$

   $$C_3^6 = 20$$

   Jadi kombinasi 5 potong roti yang bisa dibeli oleh Budi adalah 20.

6. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan. Carilah kemungkinan keluarnya jumlah mata dadu lebih besar dari 9 dengan syarat dadu pertama muncul 5!
   Jawab:
   n(S) = 36
   P(A∩B): Kemungkinan Jumlah mata dadu lebih dari 9 dadu pertama 5: {(5,5), (5,6)} = $\frac{2}{36}$
   P(B) = Peluang dadu pertama 5: {(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)} = $\frac{6}{36}$
   $P\ (A|\ B) = \frac{P\ (A\cap B)}{P\ (B)}$
   $P\ (A|\ B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}$
   $P\ (A|\ B) = \frac{1}{3}$

7. Misalkan terdapat setumpuk kartu bridge sebanyak 52 buah. Seseorang mengambil dua kartu secara acak dari tumpukkan itu. Berapa peluang terambilnya kartu itu kedua-duanya adalah “As” jika kartu pertama setelah diambil :
   a. dikembalikan
   b. tidak dikembalikan

   Jawab:
   a. A = kejadian terambilnya satu kartu As pada pengambilan pertama
      = {As Klafer, As Ruit, As Harten, As Skop}
      $n(A) = 4 \rightarrow P(A) = \frac{4}{52}$

      B|A = kejadian terambilnya satu kartu As pada pengambilan kedua setelah pengambilan pertama kartunya dikembalikan.

$n(B|A) = 4 \rightarrow P(B|A) = \frac{4}{52}$

Jadi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{4}{52}\, x\, \frac{4}{52} = \frac{16}{2.704} = \frac{1}{169}$

b. A = kejadian terambilnya satu kartu As pada pengambilan pertama

$n(A) = 4 \rightarrow P(A) = \frac{4}{52}$

B|A = kejadian terambilnya satu kartu As pada pengambilan kedua setelah

pengambilan pertama kartunya tidak dikembalikan.

$n\ (B\ A) = 3 \rightarrow P\ (B\ |A) = \frac{3}{51}$

jadi, $P\ (A \cap B) = P(A).\ P(B|A) = \frac{4}{52}\, x\, \frac{3}{51} = \frac{12}{2.652} = \frac{1}{221}$

8. Dari setumpuk kartu bridge, diambil satu kartu secara berturut-turut sebanyak dua kali. Tentukan peluang bahwa yang terambil pertama As dan yang terambil berikutnya King!

   Jawab:

   $n(S) = 52$

   $n(As) = 4 \rightarrow P(As) = n\ (As)n\ (S) = \frac{4}{52}$

   $n(K) = 4 \rightarrow P(K) = n\ (K)n\ (S) = \frac{4}{51}$

   Jadi, $P\ (As \cap K) = P(As) \times P(K) = \frac{4}{52}\, x\, \frac{4}{51} = \frac{16}{2652} = \frac{4}{663}$

9. Suatu kota kecil mempunyai satu mobil pemadam kebakaran dan satu ambulans untuk keadaan darurat. Peluang mobil pemadam kebakaran siap waktu diperlukan 0,98, peluang ambulans siap

waktu dipanggil 0,92. Dalam kejadian ada kecelakaan karena kebakaran gedung, cari peluang keduanya siap.

Jawab:

Misalkan A dan B menyatakan masing-masing kejadian mobil pemadam kebakaran dan ambulan siap. Maka

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$= (0,98) \times (0,92)$

$= 0.9016$

10. Dua dadu berwarna merah dan putih dilantunkan serentak satu kali. Misalkan A adalah kejadian munculnya angka 4 pada dadu merah dan B adalah kejadian munculnya angka 6 pada dadu putih, maka selidikilah apakah A dan B saling bebas?

    Jawab:

    $A = \{41, 42, 43, 44, 45, 46\}$, $n(A) = 6$

    $B = \{16, 26, 36, 46, 56, 66\}$, $n(B) = 6$

    $A \cap B = \{46\}$, $n(A \cap B) = 1$

    $n(S) = 36$

    maka $P(A)\times P(B) = \frac{6}{36}\ x\ \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$

    $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

    Karena $P(A \cap B) = P(A)\times P(B)$ maka A dan B saling bebas

BAB VI

LOGIKA

A. Logika dan Pernyataan Dalam Matematika

Logika berasal dari kata Yunan *'logos'* yang berarti kata, ucapan, pikiran secara utuh, atau bisa juga berarti ilmu pengetahuan. Dalam artian yang lebih luas, logika dapat dimaknai sebagai suatu cabang ilmu matematika yang mengkaji penurunan-penurunan kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang sahih (*valid correct*), dan yang tidak sahih (*tidak valid, incorrect*).

Pendefinisian secara detail suatu pernyataan dalam matematika ternyata tidaklah mudah. Kita dapat saja terjebak ke dalam filosofi yang dalam. Sehingga dalam kegiatan belajar ini, penulis berusaha mengupayakan pendekatan praktis dalam mendefinisikan dan memberi contoh suatu pernyataan.

Definisi 1 Suatu pernyataan adalah suatu kalimat yang jelas nilai kebenarannya. Bisa bernilai salah saja. Bisa bernilai benar saja. Namun tidak bernilai keduanya.

Sebagai contoh, perhatikan kalimat-kalimat berikut.

1) Bentuk "1 + 2 = 4" merupakan suatu pernyataan karena bernilai salah.
2) Kalimat "Semua kucing berwarna abu-abu" juga merupakan suatu pernyataan karena jelas bernilai salah, sebab ada beberapa kucing yang berwarna hitam.
3) Bandung adalah ibukota provinsi Jawa Tengah. Kalimat ini merupakan contoh pernyataan yang salah.
4) DKI Jakarta adalah ibukota negara Indonesia. Kalimat ini merupakan contoh pernyataan yang benar.

Kalimat yang bukan merupakan pernyataan adalah ungkapan atau kalimat yang tidak bernilai benar atau tidak bernilai salah. Contohnya "Silakan duduk!", "Apakah kamu sudah makan?", "Jangan memotong pembicaraan orang lain".

Bagaimana dengan notasi atau simbol untuk pernyataan? Dalam logika matematika, pernyataan dinotasikan (dilambangkan) dengan huruf alfabet kecil.

Contoh:

1) p: Paris ibukota negara Swiss.
2) q: Bilangan 6 adalah bilangan genap.

Selanjutnya bagaimanakah menentukan kebenaran suatu pernyataan?

- Dasar Secara Empiris, yaitu menentukan nilai kebenaran dengan mengadakan pengamatan terlebih dahulu (berdasarkan kenyataan pada saat itu). Jadi, nilai kebenaran ini bersifat relatif. Contoh: Ara berbaju putih. Alin berkulit putih bersih.
- Dasar Secara Tak Empiris (Pernyataan Absolut/Mutlak), yaitu menentukan nilai kebenaran bilamana nilai kebenaran itu mutlak tidak tergantung pada situasi dan kondisi atau waktu dan tempat. Contoh : Bilangan 2 adalah bilangan prima. Ibukota negara Inggris adalah London.

Catatan: Sebagai simbol dari benar biasa dipakai B (benar), R (right), T (true) atau 1, sedangkan simbol salah digunakan S (salah), W (wrong), F (false) atau 0. Penggunaan notasi nilai kebenaran ini harus berpasangan, yaitu B-S, atau R-W, atau T-F, atau 1-0.

Secara garis besar, pernyataan dibagi menjadi dua jenis, yaitu pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk.

Definisi 2 Pernyataan tunggal adalah pernyataan yang hanya memuat satu pokok persoalan atau satu ide.

Notasi. Pernyataan tunggal pada umumnya dinyatakan dengan huruf- huruf kecil seperti p, q, dan r.

Contoh. p : 13 adalah bilangan prima.

q : Malang adalah kota kedua terbesar di provinsi Jawa Timur.

Beberapa kalimat tunggal, p, q, dapat digabung dengan menggunakan kata penghubung sehingga membentuk pernyataan baru seperti p dan q; p atau q; p yang q, dan sebagainya. Pernyataan baru ini disebut pernyataan majemuk. Kata-kata penghubung kedua pernyataan biasa disebut konektor atau perakit.

Ditinjau dari segi definisi kalimat, sebenarnya pernyataan merupakan kalimat matematika yang tertutup. Perhatikan perbedaan antara kalimat terbuka dan tertutup berikut.

1) Kalimat tertutup adalah kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya. Nilai kebenaran yang dimaksudkan adalah nilai benar saja atau nilai salah saja, tetapi tidak keduanya. Yang dimaksud benar atau salah adalah sesuai dengan keadaan yang sesungguhnya. Kalimat tertutup dapat disebut juga sebagai pernyataan.
2) Kalimat terbuka adalah kalimat matematika yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya (tidak dapat ditentukan benar atau salahnya) sampai dilakukan penyelesaian tertentu. Kalimat terbuka biasanya mengandung unsur atau simbol yang nilainya tidak diketahui. Unsur atau simbol yang nilainya tidak diketahui ini biasa disebut dengan variabel atau peubah dan sering dilambangkan dengan huruf kecil seperti x, y, z, a, b, c, dan sebagainya. Kalimat terbuka dapat diubah menjadi

kalimat tertutup jika variabelnya diganti dengan nilai tertentu. Contohnya adalah $3x + 4 = 10$ serta akar kuadrat dari y adalah 9.

Selanjutnya kita akan membahas mengenai negasi suatu pernyataan.

Definisi 3 Negasi dari pernyataan p adalah suatu pernyataan yang bernilai salah jika p benar dan bernilai benar jika p salah.

Notasi Negasi dari p biasa dinotasikan dengan $\sim p$ atau $\neg p$ (dibaca “negasi p" , “tidak p “ , “bukan p“, atau “ingkaran p".

Contoh. Negasi dari pernyataan ”Bilangan prima genap satu-satunya adalah 2” adalah ”Bilangan 2 adalah bukan satu-satunya bilangan prima genap”.

Catatan:

- Kata sifat tidak bisa dijadikan sebagai unsur tak terdefinisi (undefined term).
- Jika kata-kata seperti ini dibuat untuk membuat pernyataan, maka harus didefinisikan terlebih dahulu.
- Misalnya pada kalimat “Ani anak yang pandai", selain butuh observasi juga harus didefinisikan terlebih dahulu tentang kriteria “pandai", sehingga tidak menimbulkan penafsiran berbeda.
- Jika pernyataan dan negasinya tidak bisa dinilai benar atau salah, maka kalimat tersebut dikatakan kalimat tak bermakna. Misalnya, kalimat “Kakak habis dibagi adik” mempunyai negasi “Kakak tidak habis dibagi adik”.

Sebagai pembahasan terakhir dalam sub materi ini, kita akan belajar mengenai tabel kebenaran (truth table). Tabel kebenaran sangat bermanfaat saat mempelajari logika matematika walaupun para matematikawan tidak sering menggunakannya dalam keseharian namun tabel kebenaran bisa untuk membantu mengecek kebenaran bagi para pemula. Ide awalnya adalah dengan merangkum semua kemungkinan nilai kebanaran dalam satu tabel. Dua pernyataan dikatakan ekivalen jika keduanya mempunyai hasil tabel kebenaran yang sama. Berikut merupakan tabel kebenaran untuk negasi.

$\boldsymbol{A}$	Bukan $\boldsymbol{A}$ ($\sim\boldsymbol{A}$)
Benar (B)	Salah (S)
Salah (S)	Benar (S)

B. Konjungsi Dan Disjungsi Serta Negasinya

Setelah kita mengenal pernyataan, kini saatnya kita mempelajari hubungan antarpernyataan melalui suatu atau beberapa perakit. Berikut perakit yang masih sederhana.

1) Perakit Konjungsi

Konjungsi dari pernyataan p dan q (ditulis p Λ q, dibaca "p dan q") adalah pernyataan majemuk yang bernilai benar hanya apabila masing-masing p, maupun q bernilai benar, sedangkan untuk keadaan lain maka dia bernilai salah. Perakit konjungsi disebut juga perakit penyertaan, karena harus menyertakan semua komponen-komponennya dan bernilai benar hanya jika semua komponennya benar. Dalam kehidupan sehari-hari banyak kata hubung lain yang mempunyai arti yang sama dengan “dan" yaitu : “yang, tetapi, meskipun, maupun, sedangkan, padahal, sambil, juga” dan sebagainya.

2) Perakit Disjungsi

Disjungsi dari pernyataan p dan q (ditulis $p \vee q$, dibaca “p atau q”) adalah pernyataan majemuk yang bernilai salah hanya apabila masing-masing p dan q salah, sedangkan untuk keadaan lain ia bernilai benar. Disjungsi disebut juga alternatif, karena cukupsalah satu saja komponennya benar maka disjungsinya benar. Disjungsi yang didefinisikan seperti demikian disebut disjungsi inklusif (lemah/weak). Disjungsi ini yang banyak dibicarakan dalam matematika dan jika dikatakan p atau q maka yang dimaksud adalah disjungsi inklusif ini.

Sedangkan untuk negasi dari konjungsi dan disjungsi mengikuti Hukum De’Morgan, yakni:

- Negasi dari $p \wedge q$, ditulis $\sim (p \wedge q)$, adalah $\sim p \vee \sim q$
- Negasi dari $p \vee q$, ditulis $\sim (p \vee q)$, adalah $\sim p \wedge \sim q$

C. Komponen-Komponen, Table Kebenaran Dan Negasi Dari Bentuk Implikasi.

Kita telah mempelajari dua perakit/penghubung antardua pernyataan. Dalam Kegiatan Belajar 4 ini kita akan mempelajari perakit lain yang berhubungan dengan pernyataan bersyarat, yakni bentuk implikasi.

Definisi 4 Implikasi adalah pernyataan yang bernilai salah hanya apabila hipotesisnya benar, tetapi diikuti oleh konklusi yang salah. Untuk keadaan lain implikasinya benar.

Notasi. Secara matematis kalimat dalam bentuk “Jika p, maka q" yang dinotasikan dengan $p \rightarrow q$ disebut implikasi.

Contoh. Pada pernyataan $p \rightarrow q$:

1) p disebut anteseden/ hipotesis,
2) q disebut konsekuen/ konklusi/ kesimpulan.

Adakah cara membaca yang lain untuk bentuk $p \rightarrow q$? Jawabannya: ada. Berikut cara membacanya.

1) jika p, maka q;
2) setiap kali p, (maka) q;
3) p hanya jika q;
4) p syarat cukup (sufficient) untuk q;
5) q syarat perlu (necessary) untuk p:
6) q asal saja p;

Setelah mengetahui cara membaca bentuk implikasi di atas, tentunya kita perlu memahami apa itu syarat cukup dan syarat perlu. Berikut diberikan penjelasannya.

- Pernyataan p dikatakan syarat cukup bagi q apabila q selalumuncul setiap kali p muncul.
- Pernyataan q dikatakan sebagai syarat perlu untuk p apabila p muncul hanya jika q muncul, jika q tidak muncul maka p juga tidak bisa muncul.

Untuk mengilustrasikan dan membedakan syarat cukup dan syarat perlu, diberikan contoh berikut. Pernyataan berbentuk implikasinya adalah “Jika suatu bilangan prima, maka bilangan itu bulat”.

Bilangan prima adalah syarat cukup untuk bilangan bulat. Pernyataan bahwa bilangan itu prima sudah cukup untuk menyatakan bilangan tersebut bulat. Artinya juga, jika kita ingin bilangan bulat cukup kita mengambil bilangan prima, karena bilangan prima pasti bulat.

Sebaliknya, jika kita mengambil bilangan yang tidak bulat maka tidak mungkin kita memperoleh bilangan prima. Akan tetapi untuk memperoleh bilangan bulat tidak perlu (tidak harus) mengambil bilangan prima (4 dan 1 juga merupakan bilangan bulat). Supaya suatu bilangan itu prima, tidak cukup hanya dikatakan bulat (4, 8, bulat tetapi tidak prima). Jadi, kita juga peroleh kenyataan bahwa syarat cukup belum tentu perlu dan syarat perlu belum tentu cukup.

Selanjutnya kita akan mempelajari jenis-jenis implikasi.

1) Implikasi Logis: konsekuen secara logis dapat disimpulkan dari hipotesis.
   Contoh: Jika semua bilangan bulat adalah rasional, maka 5 adalah bilangan rasional.
2) Implikasi Definisional: konsekuen pada implikasi ini dapat disimpulkan dari hipotesis, yaitu mengacu pada suatu definisi yang berlaku.
   Contoh: Jika bangun geometri ABCD adalah persegi, maka sisi-sisi yang sehadap adalah sejajar dan sama panjang.
3) Implikasi Empirik atau Kausal: implikasi yang diketahui berdasarkan pengamatan empiris.
   Contoh: Kalau panas air mencapai $100\circ C$, maka air

mendidih. Konsekuen “air mendidih” hanya dapat diketahui melalui pengamatan empirik.

4) Implikasi Intensional atau Desisional
Contoh: Misalnya seorang anak (siswa SMA) berkata kepada orang tuanya: “Kalau ayah tidak bisa mengantar saya ke sekolah, maka saya akan mencoba berusaha mandiri dengan berangkat ke sekolah dengan bersepeda”. Konsekuen “saya akan mencoba berusaha mandiri dengan berangkat ke sekolah dengan bersepeda” merupakan keputusan (decision) sang anak.

Bagaimana dengan pernyataan yang ekivalen dengan bentuk $p \rightarrow q$? Cek bahwa $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$. Dengan demikian, negasi dari $p \rightarrow q$ adalah p A$\sim q$.

D. Konsep Konvers, Invers, Kontraposisi, Dan Biimplikasi Dari Suatu Bentuk Implikasi Serta Konsep Tautology Dan Kontradiksi

Dari implikasi $p \rightarrow q$, kita dapat membentuk berbagai pernyataan- pernyataan yaitu:

1) $\sim p \rightarrow \sim q$ yang disebut invers,
2) $q \rightarrow p$ disebut konvers,
3) $\sim q \rightarrow \sim p$ disebut kontra posisi/kontra positif dari implikasi tadi.

Selain tiga bentuk di atas, ada satu bentuk lagi dari implikasi yang berlaku dua arah. Bentuk tersebut dinamakan biimplikasi. Berikut penjelasannya.

Biimplikasi dari pernyataan p dan q (dinotasikan dengan $p \leftrightarrow q$ dan dibaca “p jika dan

hanya jika (jhj) q" atau "p bila dan hanya bila (bhb) q")
adalah pernyataan yang bernilai benar jika komponen- komponennya bernilai sama, serta bernilai salah jika komponen- komponennya bernilai tidak sama.

Bagaimana cara membaca bentuk $p \leftrightarrow q$ selain dari penjelasan di atas? Biimplikasi $p \leftrightarrow q$, selain dibaca "p jika dan hanya jika q", dapat juga dibaca dengan:

1) Jika p maka q dan jika q maka p,
2) p syarat perlu dan cukup bagi q, dan
3) q syarat perlu dan cukup bagi p.

Definisi biimplikasi memungkinkan kita untuk memperoleh dua implikasi dari arah yang berbeda. Bagaimanakah penerapannya dalam bidang matematika itu sendiri? Berikut ini adalah salah satu contohnya.

1) Biimplikasi banyak dipergunakan dalam mendefinisikan sesuatu, misalnya: "Persegipanjang disebut persegi jika dan hanya jika masing-masing sudutnya 90∘ dan keempat sisinya sama panjang".
2) Di sini terkandung pengertian bahwa jika suatu persegipanjang adalah persegi, maka keempat sudutnya masing-masing 90∘ dan keempat sisinya sama panjang.
3) Sebaliknya jika suatu persegipanjang masing-masing sudutnya 90∘
4) dan keempat sisinya sama panjang, maka persegipanjang itu disebut persegi.

Selanjutnya tentu muncul pertanyaan

”Bagaimana bentuk negasi dari biimplikasi?”

Negasi bimplikasi $p \leftrightarrow q$ adalah $\sim p \leftrightarrow q$, di mana $\sim p \leftrightarrow q$ ekivalen dengan $p \leftrightarrow \sim q$ dan $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$.

Setelah kita mendapatkan hasil dari suatu tabel kebenaran, terkadang kita menemui hasil yang keseluruhannya bernilai benar saja, atau bernilai saja. Dari fenomena tersebut, akhirnya diperkenalkanlah istilah tautologi dan kontradiksi. Untuk latar belakangnya dapat Anda baca dari uraian berikut.

1) Beberapa pernyataan dapat digabung untuk membentuk pernyataan majemuk.
2) Pernyataan-pernyataan tunggal $p1$, $p2$, …, pn dapat membentuk suatu pernyatan majemuk yang dihubungkan oleh berbagai perakit.
3) Dilihat dari nilai kebenarannya, ada dua jenis kalimat majemuk yang istimewa, yaitu kalimat majemuk yang selalu bernilai benar dan kalimat majemuk yang selalu bernilai salah, terlepas dari nilai kebenaran masing-masing komponennya.
4) Tautologi adalah pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar (dalam segala hal) tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponennya.
5) Kontradiksi adalah pernyataan majemuk yang selalu bernilai salah (dalam segala hal) tanpa bergantung nilai kebenaran dari komponennya.

E. Kuantor Universal Dan Kuantor Eksistensial Serta Negasinya

Sebelum mempelajari kuantor, ada baiknya kita belajar terlebih dahulu mengenai tetapan dan peubah. Dalam matematika, notasi yang melambangkan unsur dibedakan atas dua macam yaitu yang mewakili unsur yang bersifat tetap dan unsur yang berubah. Berikut diberikan definisi tetapan beserta contonya.

Definisi 5. Tetapan atau konstanta adalah lambang yang mewakili suatu unsur tertentu yang bersifat khusus atau bersifat tetap dalam suatu semesta pembicaraan.

Definisi 6. Semesta pembicaraan adalah kumpulan yang menjadi sumber atau asal unsur-unsur yang dibicarakan.

Contoh. Dalam pernyataan-pernyataan berikut, simbol yang digaris bawahi adalah suatu tetapan.

1) 2 adalah bilangan asli.
2) Ani berbaju merah.
3) Bentuk persamaan linier satu variabel adalah $y = ax + b$

Sedangkan untuk peubah atau variabel dijelaskan dalam bagian berikut.

Definisi 7. Peubah atau variabel adalah lambang yang masih mewakili suatu unsur umum yang belum dikhususkan atau yang nilainya berubah-ubah pada semesta pembicarannya.

Contoh. Bagian-bagian yang digarisbawahi pada contoh kalimat berikut adalah peubah. Pada umumnya peubah dilambangkan dengan huruf-huruf terakhir dari abjad seperti x, y, dan z.

1) x adalah bilangan asli
2) Manusia berbaju merah
3) Bentuk umum fungsi linier adalah $y = ax + b$

Secara garis besar, kuantor dibedakan ke dalam dua jenis, yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial.

Definisi 8. Kuantor universal, dinotasikan dengan ∀, adalah sebuah frasa "untuk semua".

Contoh.

1) Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $x2 \geq 0$. Penulisan dengan simbol kuantor : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x2 \geq 0)$. Perhatikan bahwa penggunaan tanda kurung dimaksudkan untuk menandai bagian yang dikuantifikasi.
2) Untuk setiap bilangan rasional x dan y, hasil kali xy dan jumlahan $x + y$ adalah rasional. Penulisan dengan simbol kuantor: $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\forall y \in \mathbb{Q}$, ($xy \in \mathbb{Q}$ and $x + y \in \mathbb{Q}$) atau $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, ($xy \in \mathbb{Q}$ and $x + y \in \mathbb{Q}$)

Selanjutnya untuk kuantor eksistensial dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 9 Kuantor eksistensial, dinotasikan dengan ∃, adalah sebuah frasa "terdapat" atau "beberapa" atau "ada".

Contoh

1) Terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $x2 = 4$".Catatan: kata "terdapat" bukan berarti "hanya ada satu".
2) Terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $x2 = 5$".

3) "$\exists x \in \mathbb{Z}(x2 - 4x + 3 = 0)$". Dibaca: terdapat suatu bilangan bulat x sehingga $x2 - 4x + 3 = 0$.

Dengan demikian, bagaimana negasi dari kuantor itu? Perhatikan penjelasan berikut.

- Jika kita ingin menegasikan suatu pernyataan p yang berkuantor, maka ubah setiap $\forall$ ke $\exists$ dan setiap $\exists$ ke $\forall$, dan juga gantilah p dengan negasinya.
- $\sim\{\forall(x), p(x)\} \equiv \{\exists(x)\}\{\sim p(x)\}$
- $\sim\{\exists(x), p(x)\} \equiv \{\forall(x)\}\{\sim p(x)\}$

F. Kevalidan Argument Dan Kaidah Penarikan Kesimpulan

Sebelum lebih jauh membahas penarikan kesimpulan, kita akan belajar terlebih dahulu mengenai premis dan konklusi.

1) Premis adalah pernyataan-pernyataan yang diketahui yang akan ditarik kesimpulannya.
2) Konklusi adalah kesimpulan dari beberapa pernyataan.
3) Argumentasi adalah penarikan kesimpulan.
4) Penarikan kesimpulan dikatakan sah atau valid bila konjungsi dari premis-premis berimplikasi dengan konklusi (kesimpulan) atau merupakan tautologi.

Selanjutnya kriteria apa saja yang diperlukan agar suatu argumen dikatakan valid dan bagaimana kriteria validitas itu sendiri?

1) Ketika suatu argumen dikatakan valid, kebenaran dari premisnya menjamin kebenaran kesimpulannya.

2) Suatu argumen dikatakan valid jika tidak mungkin semua premisnya bernilai benar namun kesimpulannya salah.
3) Validitas tidak bergantung kepada kumpulan fakta-fakta.
4) Validitas tidak bergantung kepada hokum-hukum alam.
5) Validitas tidak bergantung kepada makna dari ekspresi personal yang spesifik.
6) Validitas bergantung secara alami terhadap bentuk dari argumen.

Berikut diberikan contoh argumen yang valid dan tidak valid.

- Contoh Argumen yang Tidak Valid
  - Zeno adalah seekor kura-kura.
  - Oleh karena itu, Zeno ompong.

Catatan: kebenaran premisnya tidak menyediakan jaminan yang kuat untuk kebenaran kesimpulannya.

- Contoh Argumen yang Valid
  - Zeno adalah seekor kura-kura.
  - Semua kura-kura ompong.
  - Oleh karena itu, Zeno ompong.

Kemudian bagaimana struktur penulisan argumen itu? Berikut akan diberikan salah satu cara menuliskan premis-premis beserta kesimpulannya.

Bentuk argumen: Premis 1
Premis 2
.
.
.

Premis n

Oleh karena itu, **Simpulan (Konklusi)**

Terdapat tiga jenis penarikan kesimpulan yang sering digunakan. Ketiga jenis penarikan kesimpulan itu adalah sebagai berikut.

1) Modus Ponens
   Modus Ponens merupakan suatu kaidah penarikan kesimpulan dengan premis 1 menyatakan $p \to q$ dan premis 2 menyatakan p sehingga diperoleh kesimpulan pernyataan q.
2) Modus Tollens
   Modus Tonens merupakan suatu kaidah penarikan kesimpulan dengan premis 1 menyatakan $p \to q$ dan premis 2 menyatakan $\sim q$ sehingga diperoleh kesimpulan pernyataan $\sim p$.
3) Silogisme
   Silogisme merupakan suatu kaidah penarikan kesimpulan dengan premis 1 menyatakan $p \to q$ dan premis 2 menyatakan $q \to r$ sehingga diperoleh kesimpulan pernyataan $p \to r$.

G. Soal dan Latihan

1. Negasi dari pernyataan: "Jika semua siswa SMA mematuhi disiplin maka Roy siswa teladan" yaitu ...
   Jawab:
   Pembahasan:
   p= semua siswa SMA mematuhi disiplin sekolah
   q= Roy siswa teladan
   maka, ~(p -q) = (~ p v q) = (p^~q)
   Artinya, semua siswa SMA mematuhi disiplin sekolah dan Roy bukan siswa teladan.

2. Gabungkan pasangan pernyataan-pernyataan berikut dengan menggunakan operasi disjungsi:
   a. p : Ibu memasak ayam goreng
      q : Ibu membeli soto babat di pasar
   b. p : Pak Bambang mengajar matematika
      q : Pak Bambang mengajar bahasa inggris

   Jawab:
   Pembahasan:
   a. p: Ibu memasak ayam goreng
      q: Ibu membeli soto babat di pasar
      $p \vee q$: Ibu memasak ayam goreng atau membeli soto babat di pasar.
   b. p: Pak Bambang mengajar matematika
   c. q: Pak Bambang mengajar bahasa inggris
   d. $p \vee q$: Pak Bambang mengajar matematika atau bahasa inggris

3. Perhatikan pernyataan berikut:
   "Jika cuaca mendung maka Charli membawa payung"
   Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan di atas!
   Jawab:
   Pembahasan:
   Dari implikasi $p \rightarrow q$
   p: Cuaca mendung
   q : Charli membawa payung
   Konversnya adalah $q \rightarrow p$ yaitu "Jika Charli membawa payung maka cuaca mendung".
   Inversnya adalah $\sim p \rightarrow \sim q$ yaitu "Jika cuaca tidak mendung maka Charli tidak membawa payung".

Kontraposisinya adalah $\sim q \rightarrow \sim p$ yaitu "Jika Charli tidak membawa payung maka cuaca tidak mendung".

4. Perhatikan pernyataan berikut:
   p : Tahun ini kemarau panjang.
   q : Tahun ini hasil padi meningkat.
   Nyatakan dengan kata-kata:
   c. $p \rightarrow q$
   d. $\sim p \rightarrow \sim q$
   e. $p \rightarrow \sim q$
   Jawab:
   Pembahasan:
   Implikasi memiliki format "jika p maka q" sehingga pernyataannya:
   a. $p \rightarrow q$: Jika tahun ini kemarau panjang maka hasil padi meningkat.
   b. $\sim p \rightarrow \sim q$: Jika tahun ini tidak kemarau panjang maka hasil padi tidak meningkat.
   c. $p \rightarrow \sim q$: Jika tahun ini kemarau panjang maka hasil padi tidak meningkat.

5. Tentukan kesimpulan dari:
   Premis 1: Jika hari cerah maka Budi bermain bola.
   Premis 2: Budi tidak bermain bola.
   Jawab:
   Pembahasan:
   Penarikan kesimpulan dengan prinsip Modus Tollens yaitu $p \rightarrow q$, $\sim q$ maka $\therefore \sim p$. Jadi kesimpulannya adalah "Hari tidak cerah".

GLOSARIUM

Bilangan	:	Suatu konsep matematika yang digunakan dalam pencacahan dan pengukuran
Bilangan cacah	:	Himpunan bilangan asli ditambah dengan bilangan nol.
Bilangan bulat	:	Bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, dan atau bentuk lainnya.
Bilangan rasional	:	Suatu bilangan yang bisa diubah menjadi pecahan biasa (a/b), dan jika diubah menjadi suatu pecahan desimal maka angkanya akan berhenti di suatu bilangan tertentu.
Bilangan identitas	:	Bilangan yang hanya terdiri dari angka 1 atau 0-1.
Bilangan irasional	:	Bilangan riil yang tidak bisa dinyatakan atau berubah bentuk menjadi pecahan biasa, pecahan campuran, dan pecahan desimal terbatas.
Bilangan berpangkat	:	Bilangan berpangkat atau eksponen adalah bilangan yang dikalikan dengan dirinya sendiri hingga beberapa tingkat.
Himpunan	:	Suatu kumpulan objek yang terdefinisi dengan baik.
Selang (interval)	:	Himpunan bagian dari bilangan real yang mempunyai sifat relasi tertentu.

Postulat/ Aksioma	:	Suatu kebenaran yang tidak perlu dibuktikan contoh: melalui 2 titik yang berbeda terdapat tepat satu garis, dan melalui 1 titik terdapat sekurang-kurangnya 2 garis yang berbeda
Teorema	:	Suatu kebenaran yang perlu di buktikan
Definisi	:	Suatu proposisi yang berbentuk (secara umum) Jika P maka Q, dan Jika Q maka P yang kebenarannya tidak perlu dibuktikan
Titik	:	Sesuatu yang tidak mempunyai ukuran tetapi dapat menentukan posisi sesuatu
Noktah	:	Gambar titik
Garis	:	Suatu yang memiliki ukuran panjang tetapi tidak mempunyai ukuran lebar atau tebal
Sinar	:	Separuh garis (halfline) sehingga sinar memiliki 1 arah.
Segmen garis / Penggal garis	:	Bagian dari suatu garis sedemikian sehingga menunjukkan suatu jarak.
Sudut	:	Daerah yang dibatasi oleh 2 sinar yang berpotongan
Populasi	:	Koleksi lengkap semua elemen yang akan diselidiki.
Sampel	:	Sebagian koleksi anggota yang dipilih dari populasi.
Observasi	:	Pengamatan melibatkan semua indera (penglihatan, pendengaran, penciuman, pembau, perasa
Kuesioner	:	Daftar pertanyaan tertulis yang ditujukan kepada responden.

Tabulasi silang	:	Metode tabulasi untuk merangkum data dengan dua atau lebih variabel secara bersamaan.
Permutasi	:	Cara menyusun sebuah pengujian/kejadian dengan mencermati urutan.
Kombinasi	:	Cara menyusun sebuah pengujian/kejadian tanpa mencermati urutan.
Kalimat tertutup	:	Kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya. Nilai kebenaran yang dimaksudkan adalah nilai benar saja atau nilai salah saja, tetapi tidak keduanya.
Kalimat terbuka	:	Kalimat matematika yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya (tidak dapat ditentukan benar atau salahnya) sampai dilakukan penyelesaian tertentu.
Implikasi	:	Pernyataan yang bernilai salah hanya apabila hipotesisnya benar, tetapi diikuti oleh konklusi yang salah. Untuk keadaan lain implikasinya benar.

SUMBER RUJUKAN/REFERENSI

Abdullah, S. (2015). Mahasiswa (Calon) Guru Matematika yang Profesional. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY. ISBN. 978-721-726.* Yogyakarta: UNY.

Ananda, Rusydi, dkk. 2018, Statistik Pendidikan Teori dan Praktik Dalam Pendidikan. CV. Widya Puspita. Medan

Andriliani, Luthfiah, dkk. 2022, Analisis Pembelajaran Matematika Pada Materi Geometri. Sibatik Journal Vol 1 No 7 Hal 1169 - 1178

Andriani, Parhaini. 2010. Penalaran Aljabar Dalam Pembelajaran Matematika. Beta : Jurnl Pendidikan Matematika. Vol. 8 No. 1 (Mei) Hal 1 - 15

Ari Sriantini, dkk. 2020. Konsepsi Segitiga Bola Ditinjau dari Gaya Belajar. Math Didactic : Jurnal Pendidikan Matematika. Vol. 6 No. 1 Hal 1- 11

Cesaria, A., Herman, T., & Dahlan, J. A. (2021). Level Berpikir Geometri Peserta Didik Berdasarkan Teori Van Hiele pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar. Jurnal Elemen, 7(2), 267–279. https://doi.org/10.29408/jel.v7i2.2898

Isrok'atua. 2015. Memahami Konsep Dasar Matematika Untuk PGSD. Bumi Aksara

Kusumaningpuri, Aditya Rini, dkk. 2022. Analisis Kesulitan Matematika Pokok Bahasan Statistika Pada Siswa Sekolah Dasar. Jurnal Basicedu :

Journal of elementary Education Vol 6 No 1 Hal 933 - 942

Manullang. Febriani Rotua. 2019. Konsep Dasar Matematika SD untuk PGSD, Prenada Media Grup

Maryati, I. (2017). Analisis Kesulitan Dalam Materi Statistika Ditinjau Dari Kemampuan Penalaran Dan Komunikasi Statistis. Prisma, 6(2), 173–179. https://doi.org/10.35194/jp.v6i2.209

Maryono. (2016). Profil Pedagogical Content Knowledge (PGC) Mahasisawa Calon Guru Matematika ditinjau dari kemampuan Akademiknya. Jurnal Review Pembelajaran Matematika.

Mashadi. 2018. Geometri Edisi https://mashadi.staff.unri.ac.id/files/2018/10/BUKU- GEOMETRI-EDISI-2.pdf

P.Sarjimin, 2006. Peningkatan Pemahaman Rumus Geometri Melalui Pendekatan Realistik di Sekolah Dasar. Cakrawala Pendidikan. No 1 Hal 73 - 92

Purniati, Tia. 2009. Matematika. Direktoral Jenderal Pendidikan Islam Departemen Agama Republik Indonesia : Jakarta Pusat

Putra, Yudi Yunika, dkk . 2020. Literasi Mate,matika (Mathematical Literacy) Soal Matematika Model PISA Menggunakan Konteks Bangka Belitung. CV. Budi Utama

Purnamasari, Imas, dkk. 2017, Penerapan Model Kuantum TANDUR dalam Pembelajaran penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Cacah Untuk Meningkatkan Pemahaman Siswa. PEDADIDAKTIKA : Jurnal Ilmiah Pendidikan Guru Sekolah Dasar. Vol.4, No.1 hal 187-195

Ramadhini, F., & Mahdi, N. I. (2020). Peningkatan Pemahaman Bentuk Geometri Anak Usia 5-6 Tahun Melalui Kegiatan Seni Dan Kerajinan Tangan (ART AND CRAFT). Forum Paedagogik, 8, 1–11

Ridwan, T., Hidayat, E., & Abidin, Z. (2020). Edugames N-Ram Untuk Pembelajaran Geometri Pada Anak Usia Dini. Jurnal Teknoinfo, 14(2), 89. https://doi.org/10.33365/jti.v14i2.508

Risnayati, C. 2021. Meningkatan Konsep Matematika Materi Operaso Bilangan Bulat Melalui Metode Demonstrasi Dengan Media. Jurnal Wahana Pendidikan. Vol. 8 No. 1 Hal 91-102

Roebyanto, Goenawan, dkk. 2017. Pemecahan Masalah Matematika Untuk PGSD. Remaja Rosdakarya : Bandung

Rohman, Arif Nur, dkk. 2017. Analisis Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa Kelas III Sekolah Dasar Tentang Materi Unsur dan Sifat Bangun Datar Sederhana. PEDADIDAKTIKA : Jurnal Ilmiah Pendidikan Guru Sekolah Dasar. Vol 4 No 2 HAl 106 - 118

Sari, Ariesta Kartika, dkk. 2012. Matematika Untuk Mahasiswa PGSD. Bangkalan

Sari, Desi Ratna , dkk. 2021. Analisis Kemampuan Siswa SD Da;am Menyelesaikan Soal Geometri Asesmen Kompetensi Minimum. JPG : Jurnal Pendidikan Guru. Vol. 2 No. 4 Hal 186 - 190

Setiawan, Ezra Putranda. 2021. Literasi Statistika Dalam Kurikulum Matematika Sekolah Dasar (SD) 2004 - 2020 : Tinjauan Historis dan Pengembangannya.

Jurnal Pendidikan dan Kebudayaan. Vol, 6 No. 1 Hal 1 - 20

Situngkir, Esra Betharia. 2022. Pengembangan Modul Operasi Aljabar Terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa Kelas VII di SMP Negeri 37 Medan. SEPREN : Journal of Mathematics Education and Applied. Vol 3 No 2 Hal 13 - 20

Siang, Jong Jek, 2015. Logika Matematika Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi. CV. Andi Offset

Shadiq, Fadjar. 2014. Pembelajaran Matematika Cara Meningkatkan Kemampuan Berpikir Siswa. Graha Ilmu : Yogyakarta

Sukiyanto, Sutan Syahrir, dkk. 2021. Matematika untuk PGSD/PGMI, Nuta Media

Van de Walle, Jhon A. 1994. Elementery Shool Mathematics, New York . Longman

Wahyudin. (1999). KEmampuan Guru, Calon Guru dan Siswa Pada Mata Pelajaran Matematika. Bandung: IKIP.

Wicaksana, A., & Rachman, T. (2018). Analisis Kesulitan Belajar Matematika Pada Topik Logika Pada Siswa SMK Muhammadiyah 3 Klaten Utara. Angewandte Chemie International Edition, 6(11), 951–952., 3(1), 10–27. https://medium.com/@arifwicaksanaa/pengertian-use-case-a7e576e1b6bf